A kvantummechanikai állapottér geometriája

MOLNÁR András

2011. május 11.

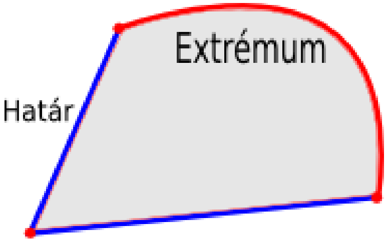
Tartalom

1. Állapottér
   - Klasszikus
   - Kvantum
2. Csatornák
3. Fisher információ, monoton metrikák

Klasszikus, diszkrét eloszlás

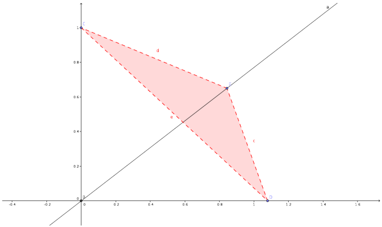
Legyen $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{P}_n$ a 2^Ω-n értelmezett valószínűségi mértékek halmaza: $p(\Omega) = 1$, $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in 2^\Omega$

- A $p(\Omega) = 1$ mértékek affin teret alkotnak a véges mértékek vektortere felett.
- $\mathcal{P}_n$ konvex: $\lambda p + \mu q \in \mathcal{P}_n$, ha $p, q \in \mathcal{P}_n$ és $\lambda, \mu \in [0, 1]$
- $\mathcal{P}_n$ határa: $\exists x \in \Omega : p(x) = 0$ (ha $|\Omega| \neq 1$, topológia)
- $\mathcal{P}_n$ extrémumai az 1 pontra koncentrált mértékek.



Klasszikus, diszkrét eloszlás

A $\mathcal{P}_n$ halmaz egy szimplex.
Sokaság struktúrával felruházható.
Ehhez a szélét ki kell hagyni. Térkép:
önmagát térképezi, elég 1 térkép.



Kvantummechanika

Az állapottér most az $n \times n$ sűrűségi mátrixok tere:
$S = \{\rho \in M_n | \rho = \rho^*, \rho \geq 0, \mathrm{Tr}\, \rho = 1\}$.

- A $Tr(\rho) = 1$, $\rho = \rho^*$ mátrixok affin teret alkotnak az $S_0 = \{\rho \in M_n | \mathrm{Tr}(\rho) = 0, \rho = \rho^*\}$ valós vektortér felett.
- Az S halmaz konvex.
- Határa: szinguláris mátrixok: $\exists \psi : \rho\psi = 0$
- Extrémumai: a tiszta állapotok: $\exists \varphi : \rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$

Kvantummechanika

Sokaság struktúrával ruházható fel: ehhez a szélét ki kell hagyni. Térképezés pl.: $X_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ji})$, $Y_{ij} = i\frac{1}{2}(E_{ij} - E_{ji})$ és $n-1$ független diagonális mátrix (D_i) által képzett bázison való kifejtés: $\rho = \frac{1}{n}\mathrm{Id} + \sum_{ij} a_{ij}X_{ij} + b_{ij}Y_{ij} + \sum_i d_i D_i$

Állapottér 2D-ban

Rögzítsük a Hilbert-tér egy bázisát! A Pauli-mátrixok bázist alkotnak az önadjungált mátrixok valós vektorterében:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

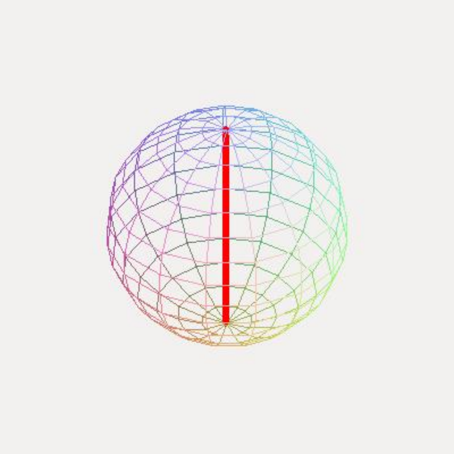
Minden sűrűségmátrix előáll a következő módon:

$$\rho = \frac{1}{2}\,\mathrm{Id} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + c & a - bi \\ a + bi & \frac{1}{2} - c \end{pmatrix}$$

.

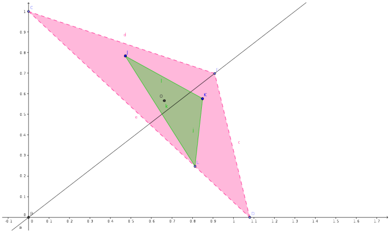
A pozitivitás feltétele: $a^2 + b^2 + c^2 < 1$.

A Bloch-gömb, benne a diagonális állapotok:



Klasszikus csatornák

- A környezet nem ismert
- Véletlen átmenetek
- Pozitív affin transzformáció
- Bisztochasztikus: entrópia növelés



Példa: nem bisztochasztikus leképzés

$$(1/2,\, 1/2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (1/4,\, 3/4)$$

Kvantumcsatornák

Definíció: kvantumcsatorna

- Affin transzformáció (Legyen most $M_n \to M_n$)
- Trace tartó (mérések leírásánál nem mindig)
- Pozitív
- Teljesen pozitív

Kvantumcsatornák

Definíció: kvantumcsatorna

- Affin transzformáció (Legyen most $M_n \to M_n$)
- Trace tartó (mérések leírásánál nem mindig)
- Pozitív
- Teljesen pozitív

Adjungálás - nem teljesen pozitív

Nagy rendszer részére lehet alkalmazni: $\forall env \quad \mathrm{Id}_{env} \otimes T \geq 0$

$$\mathrm{Id} \otimes T \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Teljes pozitivitás - Choi

1 speciális környezet elég: környezet $\equiv$ rendszer

1 speciális állapot elég

Choi tétele

$T : M_n \to M_n$ teljesen pozitív $\iff$
$\mathrm{Id} \otimes T \sum_{i,j} E_{i,j} \otimes E_{i,j} = \sum_{i,j} E_{i,j} \otimes T(E_{i,j}) > 0$

A feltétel 1 qubitre:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc} T(E_{11}) & T(E_{12}) \\ T(E_{21}) & T(E_{22}) \end{array}\right) > 0$$

Teljes pozitivitás - Kraus

Kraus tétele

$T : M_n \to M_n$ teljesen pozitív trace-tartó $\iff$ ha vannak $V_i : M_n \to M_n$ $(i = 1 \dots n^2)$ operátorok, hogy $T(\rho) = \sum_i V_i \rho V_i^*$, ahol $\sum V_i^* V_i = \mathrm{Id}$

Unitér időfejlődés részleges nyoma CP:

$$T(\rho) = \sum_k \langle \phi_k | U \left(|\phi_0\rangle\langle\phi_0| \otimes \rho \right) U^* | \phi_k \rangle = \sum_k V_k \rho V_k^*$$

$V_k = \langle \phi_k | U | \phi_0 \rangle$
Entrópia növelés: $\sum_k V_k V_k^* = \mathrm{Id}$

Kvantumcsatorna 2D-ban

Legyen $T : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ trace-tartó, affin leképzés. Ekkor $A \in M_2(\mathbb{R})$, $r, t \in \mathbb{R}^3$ jelöléssel írható:

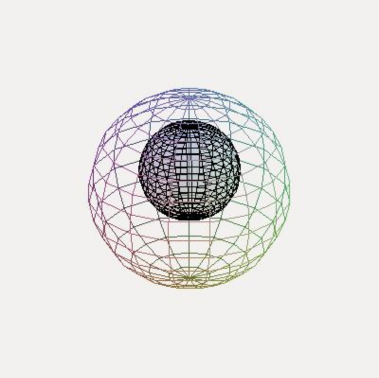
$$T\left(\frac{1}{2}\sigma_0 + r\sigma\right) = (Ar + t)\sigma + \frac{1}{2}\sigma_0$$

Choi alapján ez teljesen pozitív, ha:

$$T \otimes \mathrm{Id}\left(\sum_{ij} E_{ij} \otimes E_{ij}\right) = T \otimes \mathrm{Id}\begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_z & \sigma_x + i\sigma_y \\ \sigma_x - i\sigma_y & \sigma_0 - \sigma_z \end{pmatrix} \geq 0$$

Kvantumcsatorna 2D-ban

T teljesen pozitív, ha $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ és $t = (0, 0, 0.2)$



Fisher információ - klasszikus eset

Szép eloszláscsalád $\theta \in \mathbb{R}^n$ paraméterrel, $p(x, \theta)$ sűrűségi függvényekkel

Fisher információ

Fisher információs mátrixa: $g^{(F)} \in M_n$

$$g_{i,j}^{(F)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p(x,\theta)} \partial_{\theta_i} p(x,\theta) \partial_{\theta_j} p(x,\theta) dx$$

Tulajdonságok:

- Cramer-Rao: kinyerhető információ
- Az entrópia második deriváltja $(\times -1)$
- Pozitív, szimmetrikus mátrix: skalárszorzás
- Bisztochasztikus leképzés: csökken az információ

Fisher információ - klasszikus eset

Szép eloszláscsalád $\theta \in \mathbb{R}^n$ paraméterrel, $p(x,\theta)$ sűrűségi függvényekkel

Fisher információ

Fisher információs mátrixa: $g^{(F)} \in M_n$

$$g^{(F)}_{i,j} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p(x,\theta)} \partial_{\theta_i} p(x,\theta) \partial_{\theta_j} p(x,\theta) dx$$

Tulajdonságok:

- Cramer-Rao: kinyerhető információ
- Az entrópia második deriváltja $(\times -1)$
- Pozitív, szimmetrikus mátrix: skalárszorzás
- Bisztochasztikus leképzés: csökken az információ

Kvantum eset: monoton metrikák

- S_n: sokaság, $n \times n$ sűrűségi mátrixok
- Érintőtér: $T_D S_n \equiv \{\rho \in M_n | Tr \rho = 0, \rho = \rho^*\}$
- G_n metrika család: $TS_n \times TS_n \to \mathbb{R}$

Monoton metrikák családja

G_n monoton, ha $\forall T : M_n \to M_m$ nyomtartó, egységtartó, CP leképzésre, $\forall D \in S_n$, $\forall X \in T_D S_n$:

$$G_D(X, X) \geq G_{T(D)}\left(T(X), T(X)\right)$$

Petz osztályozási tétele

Jelölések:

- f operátormonoton: $A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)\ \forall A, B \in SA_n$
- $R_D(A) = AD$ illetve $L_D(A) = DA$

Petz tétele: a monoton metrikák karakterizációja

Monoton metrikák pontosan a következő alakban állnak elő:

$$K_D(X, Y) = Tr\left(X\left[R_D^{1/2} f\left(L_D R_D^{-1}\right) R_D^{1/2}\right]^{-1}(Y)\right)$$

$f(x) = xf(\frac{1}{x})$, f operátormonoton, f pozitív

- $f(x) = \frac{1+x}{2}$: Bures-metrika
- $f(x) = \frac{x-1}{log(x)}$: Kubo–Mori-metrika

Példa: klasszikus eset, normális eloszlás

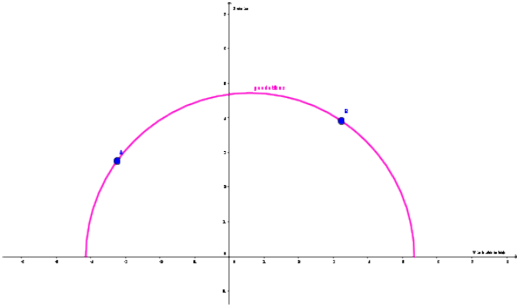
Normális eloszlások paraméterezése: $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$p(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$

A Fisher metrika:

$$g^{(F)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{pmatrix}$$

Geodetikus: félkör
Bolyai-Lobacsevszkij geometria



Stratégia

- Állpottér, csatornák
  - Sztochasztikus állpotváltozások
  - Kvantumos eset: teljes pozitivitás
- Fisher információs mátrixa
  - Klasszikus eset
  - Kvantum eset
- Metrika az állapottéren: geometria

Irodalom

- Attila Andai, *Információgeometria a kvantummechanikában, doktori értekezés* (2003)
- Dénes Petz, *Quantum Information Theory and quantum Ssatistics*, Theoretical and Mathematical Physics (Springer, Berlin Heidelberg 2008)
- Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and quantum information* (Cambridge University Press, 2000)

Kérdések