Ricci-görbület a kvantummechanikai állapottéren

Lovas Attila

Témavezető: Dr. Andai Attila

2014. június 27.

Előzmények

Mivel foglalkozik a kvantum-információgeometria?

- Differenciálgeometriai eszközökkel vizsgál nemkommutatív valószínűségelméleti objektumokat.
- Megfeleltetést létesít a Riemann-geometria és a nemkommutatív valószínűségszámítás fogalmai között.

Korábbi eredményeink [3] (2012)

- $\mathrm{Cov}^s(A,B) = \langle A, B\rangle_{\frac{1+\mathrm{id}_{\mathbb{C}}}{2}}$
- Határozatlansági relációk $\leftrightsquigarrow$ Metrikák

Előzmények

Mivel foglalkozik a kvantum-információgeometria?

- Differenciálgeometriai eszközökkel vizsgál nemkommutatív valószínűségelméleti objektumokat.
- Megfeleltetést létesít a Riemann-geometria és a nemkommutatív valószínűségszámítás fogalmai között.

Korábbi eredményeink [3] (2012)

- $\mathrm{Cov}^s(A,B) = \langle A, B\rangle_{\frac{1+\mathrm{id}_{\mathbb{C}}}{2}}$
- Határozatlansági relációk $\leftrightsquigarrow$ Metrikák

A kvantummechanikai állapottér

Definíció

Legyen $\mathcal{H}_n$ egy rögzített n-dimenziós Hilbert-tér.

Jelölés: $\mathcal{M}_n := \mathcal{Lin}(\mathcal{H}_n)$.

1. *Kvantummechanikai állapottér*

$$\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)} := \{ D \,|\, D \in \mathcal{M}_n,\ D \geq 0,\ \mathrm{Tr}(D) = 1 \}.$$

2. *A fizikai mennyiségek összessége*

$$\mathcal{M}_{n,sa} := \{ A \,|\, A \in \mathcal{M}_n,\ A = A^* \}.$$

Sima struktúra az állapottéren

Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$ egy állapot és $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ a $\mathcal{H}_n$ n-dimenziós Hilbert-tér egy bázisa.

$$(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$e_k \vee e_l = \frac{1}{2}(E_{kl} + E_{lk}) \quad \text{és} \quad e_k \wedge e_l = \frac{1}{2i}(E_{kl} - E_{lk}) \tag{1}$$

$(1 \leq k < l \leq n)$

$$\phi : \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+} \to \mathbb{R}^{n^2-1} \quad D \mapsto \phi(D) \tag{2}$$

$$\phi(D) := (\mathrm{Tr}(DE_{11}), \ldots, \mathrm{Tr}(DE_{n-1,n-1}), \mathrm{Tr}(D(e_1 \vee e_2)), \ldots, \mathrm{Tr}(D(e_1 \vee e_n)), \ldots, \mathrm{Tr}(D(e_{n-1} \vee e_n)), \mathrm{Tr}(D(e_1 \wedge e_2)), \ldots, \mathrm{Tr}(D(e_1 \wedge e_n)), \ldots, \mathrm{Tr}(D(e_{n-1} \wedge e_n))) \tag{3}$$

Operátormonoton függvények I.

Definíció

Egy $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény operátormonoton (növekvő), ha

$$\forall (n \in \mathbb{N}) \quad \forall (A, B \in \mathcal{M}_{n,sa}) \quad A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B).$$

Egy f operátormonoton függvény szimmetrikus, ha

$$\forall (x \in \mathbb{R}^+) \quad f(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right),$$

és normált, ha $f(1) = 1$.

Jelölés: $\mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ a szimmetrikus, normált operátormonoton függvények halmaza.

Operátormonoton függvények II.

Tétel

Minden $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvény analitikusan kiterjed a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pontozott komplex síkra.

Bizonyítás. Lásd: [1]. **Q.E.D.**

Következmény

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{x}\right) &= f(x) - xf'(x) \\ f''\left(\frac{1}{x}\right) &= x^3 f''(x) \\ f'''\left(\frac{1}{x}\right) &= -3x^4 f''(x) - x^5 f'''(x) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f'(1) &= \tfrac{1}{2} \\ \\ f'''(1) &= -\tfrac{3}{2} f''(1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *$f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ páros rendű deriváltjai meghatározzák az f összes deriváltját.*

Kvantum Fisher információk

Definíció

Az $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvényhez rendelt Cenzov–Morozova-függvény:

$$c_f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto c_f(x,y) := \frac{1}{x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{4}$$

Definíció

Legyen $D \in \mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$, és $X, Y \in T_D\mathcal{M}_{n,sa}^{(1)+}$, ekkor

$$g(D)(X,Y) = Tr \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c_f(\xi,\eta) X(\xi - D)^{-1} Y(\eta - D)^{-1} \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{5}$$

metrikát ad meg. Az ilyen alakú metrikák a kvantummechanikai Fisher-információk.

Az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ szemi-Riemann sokaság

Ezentúl $c : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tetszőleges holomorf függvény.

$G : \mathcal{M}_{n,sa} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{M}_n)$

$$G(D)(Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi, \eta)(\xi - D)^{-1} Y (\eta - D)^{-1} \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \quad (6)$$

Ekkor

$$g(D)(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(XG(D)(Y))$$

szemi-Riemann metrika az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon.

A $T_D\mathcal{M}_{n,sa} \cong \mathcal{M}_{n,sa}$ érintőtér általunk tekintett bázisa:

$$\begin{aligned} F_{kl} &= E_{kl} + E_{lk} & (1 \le k \le l \le n) \\ H_{kl} &= -i(E_{kl} - E_{lk}) & (1 \le k < l \le n). \end{aligned}$$

Az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ szemi-Riemann sokaság

Ezentúl $c : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tetszőleges holomorf függvény.

$G : \mathcal{M}_{n,sa} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{M}_n)$

$$G(D)(Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi, \eta)(\xi - D)^{-1} Y (\eta - D)^{-1} \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{6}$$

Ekkor

$$g(D)(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(XG(D)(Y))$$

szemi-Riemann metrika az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon.

A $T_D\mathcal{M}_{n,sa} \cong \mathcal{M}_{n,sa}$ érintőtér általunk tekintett bázisa:

$$\begin{aligned} F_{kl} &= E_{kl} + E_{lk} && (1 \le k \le l \le n) \\ H_{kl} &= -i(E_{kl} - E_{lk}) && (1 \le k < l \le n). \end{aligned}$$

Az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ szemi-Riemann sokaság

Ezentúl $c : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tetszőleges holomorf függvény.

$G : \mathcal{M}_{n,sa} \to \mathrm{Lin}(\mathcal{M}_n)$

$$G(D)(Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi, \eta)(\xi - D)^{-1} Y (\eta - D)^{-1} \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \quad (6)$$

Ekkor

$$g(D)(X, Y) = \mathrm{Tr}\,(XG(D)(Y))$$

szemi-Riemann metrika az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaságon.

A $T_D\mathcal{M}_{n,sa} \cong \mathcal{M}_{n,sa}$ érintőtér általunk tekintett bázisa:

$$\begin{aligned} F_{kl} &= E_{kl} + E_{lk} & (1 \le k \le l \le n) \\ H_{kl} &= -i(E_{kl} - E_{lk}) & (1 \le k < l \le n). \end{aligned}$$

További hasznos jelölések

Szimmetrizáció és antiszimmetrizáció

$$\begin{aligned} \{\text{Kifejezés}(X, Y)\}_{X,Y} &:= \text{Kifejezés}(X, Y) + \text{Kifejezés}(Y, X) \\ [\text{Kifejezés}(X, Y)]_{X,Y} &:= \text{Kifejezés}(X, Y) - \text{Kifejezés}(Y, X) \end{aligned} \tag{7}$$

Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság tekintett pontja

$$D \in \mathcal{M}_{n,sa} \quad D = \mathrm{diag}\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle \tag{8}$$

$$c_{i_1 \ldots i_n; j_1 \ldots j_m} := \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi, \eta) \prod_{r=1}^{n} (\xi - \lambda_{i_r})^{-1} \prod_{s=1}^{m} (\eta - \lambda_{j_s})^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{9}$$

További hasznos jelölések

Szimmetrizáció és antiszimmetrizáció

$$\begin{aligned} \{\mathrm{Kifejezés}(X,Y)\}_{X,Y} &:= \mathrm{Kifejezés}(X,Y) + \mathrm{Kifejezés}(Y,X) \\ [\mathrm{Kifejezés}(X,Y)]_{X,Y} &:= \mathrm{Kifejezés}(X,Y) - \mathrm{Kifejezés}(Y,X) \end{aligned} \tag{7}$$

Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság tekintett pontja

$$D \in \mathcal{M}_{n,sa} \quad D = \mathrm{diag}\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle \tag{8}$$

$$c_{i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_m} := \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi, \eta) \prod_{r=1}^{n} (\xi - \lambda_{i_r})^{-1} \prod_{s=1}^{m} (\eta - \lambda_{j_s})^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{9}$$

További hasznos jelölések

Szimmetrizáció és antiszimmetrizáció

$$\begin{aligned} \{\mathrm{Kifejezés}(X,Y)\}_{X,Y} &:= \mathrm{Kifejezés}(X,Y) + \mathrm{Kifejezés}(Y,X) \\ [\mathrm{Kifejezés}(X,Y)]_{X,Y} &:= \mathrm{Kifejezés}(X,Y) - \mathrm{Kifejezés}(Y,X) \end{aligned} \tag{7}$$

Az $\mathcal{M}_{n,sa}$ sokaság tekintett pontja

$$D \in \mathcal{M}_{n,sa} \quad D = \mathrm{diag}\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle \tag{8}$$

$$c_{i_1\ldots i_n;j_1\ldots j_m} := \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} c(\xi,\eta) \prod_{r=1}^{n} (\xi - \lambda_{i_r})^{-1} \prod_{s=1}^{m} (\eta - \lambda_{j_s})^{-1} \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{9}$$

Kovariáns deriválás

Definíció

Egy $\nabla : \Gamma(M, TM) \times \Gamma(M, TM) \to \Gamma(M, TM)$ *leképezés kovariáns deriválás az* M *sokaságon, ha*

1. $\nabla_{(X+Y)} U = \nabla_X U + \nabla_Y U$, *ha* $X, Y, U \in \Gamma(M, TM)$.
2. $\nabla_X (U + V) = \nabla_X U + \nabla_X V$, *ha* $X, U, V \in \Gamma(M, TM)$.
3. $\nabla_{\phi \cdot X} U = \phi \cdot \nabla_X U$, *ha* $X, U \in \Gamma(M, TM)$ *és* $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.
4. $\nabla_X (\phi \cdot U) = (X\phi) \cdot U + \phi \nabla_X U$, *ha* $X, U \in \Gamma(M, TM)$ *és* $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.

Állítás

$\exists\ \Gamma$ *(2,1)-típusú tenzormező az* $\mathcal{M}_{n,sa}$ *sokaságon, hogy*

$$\nabla_X Y = d\,Y(X) + \Gamma(X, Y). \tag{10}$$

Kovariáns deriválás

Definíció

Egy $\nabla : \Gamma(M, TM) \times \Gamma(M, TM) \to \Gamma(M, TM)$ *leképezés kovariáns deriválás az* M *sokaságon, ha*

1. $\nabla_{(X+Y)} U = \nabla_X U + \nabla_Y U$, *ha* $X, Y, U \in \Gamma(M, TM)$.
2. $\nabla_X (U + V) = \nabla_X U + \nabla_X V$, *ha* $X, U, V \in \Gamma(M, TM)$.
3. $\nabla_{\phi \cdot X} U = \phi \cdot \nabla_X U$, *ha* $X, U \in \Gamma(M, TM)$ *és* $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.
4. $\nabla_X (\phi \cdot U) = (X\phi) \cdot U + \phi \nabla_X U$, *ha* $X, U \in \Gamma(M, TM)$ *és* $\phi \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.

Állítás

$\exists\, \Gamma$ *(2,1)-típusú tenzormező az* $\mathcal{M}_{n,sa}$ *sokaságon, hogy*

$$\nabla_X Y = d\,Y(X) + \Gamma(X, Y). \qquad (10)$$

Kovariáns deriválás görbületi tenzora és torziótenzora

Definíció

Az M sima sokaság ∇ deriválásra vonatkozó Riemann-féle görbületi tenzora a

$$\mathfrak{R}(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

(3,1)-típusú tenzormező, torziótenzora pedig

$$\mathfrak{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

formulával megadott (2,1)-típusú tenzormező.

A Levi–Civita kovariáns deriválás

Definíció

Egy (M, g) szemi-Riemann sokaságon adott ∇ kovariáns deriválást metrikus, ha

$$(\forall X, Y, Z \in \Gamma(M, TM)) \quad Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Tétel

Egy (M, g) szemi-Riemann sokaságon $\exists!$ metrikus és torziómentes kovariáns deriválás.

Ez a Levi–Civita kovariáns deriválás.

$$g(\Gamma(X, Y), Z) = \frac{1}{2}\left(dg(X)(Y, Z) + dg(Y)(X, Z) - dg(Z)(X, Y)\right) \tag{11}$$

A Levi–Civita kovariáns deriválás

Definíció

Egy (M, g) szemi-Riemann sokaságon adott ∇ kovariáns deriválást metrikus, ha

$$(\forall X, Y, Z \in \Gamma(M, TM)) \quad Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Tétel

Egy (M, g) szemi-Riemann sokaságon $\exists!$ metrikus és torziómentes kovariáns deriválás.

Ez a Levi–Civita kovariáns deriválás.

$$g(\Gamma(X, Y), Z) = \frac{1}{2}\left(d g(X)(Y, Z) + d g(Y)(X, Z) - d g(Z)(X, Y)\right) \tag{11}$$

Az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ sokaság Levi–Civita kovariáns deriválása

Globális alak

$$\Gamma(X,Y) = \frac{1}{2} G^{-1} \left(\{\mathrm{d}\, G(X)(Y) - \Lambda(X,Y)\}_{X,Y} \right) \tag{12}$$

Lokális alak

$$\Gamma(E_{kl}, E_{pq}) = \frac{1}{2} \left(\frac{c_{p;ql} + c_{pq;l} - c_{pl;q}}{c_{p;l}} \delta_{kq} E_{pl} + \frac{c_{k;lq} + c_{kl;q} - c_{kq;l}}{c_{k;q}} \delta_{pl} E_{kq} \right) \tag{13}$$

Kovariáns deriválás görbületi tenzora

Globális alak

$$\mathfrak{R}(X,Y,Z) = \frac{1}{2}G^{-1}\Big[\mathrm{d}^2\, G(X)(Z)(Y) - \{\mathrm{d}\,\Lambda(X)(Y,Z)\}_{Y,Z} - \\ -\{\Lambda(X,\Gamma(Y,Z))\}_{X,\Gamma(Y,Z)} - [\mathrm{d}\, G(X)(\Gamma(Y,Z))]_{X,\Gamma(Y,Z)}\Big]_{X,Y} \tag{14}$$

Lokális alak

$$\mathfrak{R}(E_{ij},E_{kl},E_{pq}) = \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{c_{ij;lq}+c_{iq;jl}-(c_{i;jql}+c_{ijq;l})}{c_{i;q}} - \frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{ij;q}+c_{iq;j}-c_{i;jq}}{c_{i;q}}\right)\delta_{jk}\delta_{lp}E_{iq}+ \\ +\left(\frac{c_{k;lqj}+c_{klj;q}-(c_{klq;j}+c_{kqj;l})}{c_{k;j}} - \left(\frac{c_{k;lq}+c_{kl;q}-c_{kq;l}}{2c_{k;q}}\frac{c_{k;qj}+c_{kj;q}-c_{kq;j}}{c_{k;j}} - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{c_{p;qj}+c_{pq;j}-c_{pj;q}}{2c_{p;j}}\frac{c_{l;kj}+c_{kl;j}-c_{k;lj}}{c_{k;j}}\right)\right)\delta_{lp}\delta_{qi}E_{kj}+ \\ +\left(\frac{c_{pq;lj}+c_{pj;ql}-(c_{pql;j}+c_{plj;q})}{c_{p;j}} - \frac{c_{p;ql}+c_{pq;l}-c_{pl;q}}{2c_{p;l}}\frac{c_{p;jl}+c_{pj;l}-c_{pl;j}}{c_{p;j}}\right)\delta_{qk}\delta_{li}E_{pj}\Bigg]_{(ik)(jl)} \tag{15}$$

A Ricci-tenzor lokális alakja

Definíció

$$\mathfrak{Ric}(Y,Z) := Tr(X \mapsto \mathfrak{R}(X,Y,Z)) \tag{16}$$

Állítás

$$\mathfrak{Ric}(E_{kl},E_{pq}) = \mathcal{R}_{kp}\delta_{kl}\delta_{pq} + \sum_{s=1}^{n} \mathcal{S}_{kls}\delta_{lp}\delta_{kq} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{kp} &:= \frac{c_{k;kpp} + c_{kkp;p} - (c_{kk;pp} + c_{kp;kp})}{c_{k;p}} + \frac{c_{k;pp}c_{kk;p}}{2c_{k;p}^2} \\
\mathcal{S}_{kls} &:= \left\{ \frac{c_{sk;lk} - c_{s;klk} - c_{skk;l} + c_{k;lks}}{c_{k;s}} + \frac{(c_{l;sk} + c_{lk;s} - c_{ls;k})^2}{4c_{k;s}c_{l;s}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2c_{sk;k} - c_{s;kk}}{c_{s;k}} \frac{2c_{kl;k} - c_{kk;l}}{2c_{k;k}} \right\}_{k,l}
\end{aligned} \tag{18}$$

A Ricci-tenzor és a metrika szerkezete

Ricci-tenzor

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Ric}(F_{kl}, F_{pq}) &= 4\mathcal{R}_{kp}\delta_{kl}\delta_{pq} + 2(1+\delta_{kl})\sum_{s=1}^{n}\mathcal{S}_{kls}\delta_{kp}\delta_{lq} \\
\mathfrak{Ric}(H_{kl}, H_{pq}) &= 2\sum_{s=1}^{n}\mathcal{S}_{kls}\delta_{kp}\delta_{lq} \\
\mathfrak{Ric}(F_{kl}, H_{pq}) &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Metrika

$$\begin{aligned}
g(F_{kl}, F_{pq}) &= 2(1+\delta_{kl})c_{k;l}\delta_{kp}\delta_{lq} \\
g(H_{kl}, H_{pq}) &= 2c_{k;l}\delta_{kp}\delta_{lq} \\
g(F_{kl}, H_{pq}) &= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

A Ricci-görbület lokális viselkedése

Állítás

Az $\mathcal{R}$ és $\mathcal{S}$ függvények másodrendű közelítései.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{kp} &= -\frac{3\,(8f''(1)+1)}{8\lambda_k^2} + \frac{3\,(8f''(1)+1)}{8\lambda_k^3}(\lambda_p-\lambda_k) - \\
&\quad - \frac{80f^{(4)}(1) - 288f''(1)^2 - 120f''(1) + 27}{96\lambda_k^4}(\lambda_p-\lambda_k)^2 + \mathcal{O}\left((\lambda_p-\lambda_k)^3\right) \\
\mathcal{S}_{kks} &= \frac{3\,(8f''(1)+1)}{8\lambda_k^2} + \frac{2f''(1)-1}{8\lambda_k^3}(\lambda_s-\lambda_k) + \\
&\quad + \frac{20f^{(4)}(1) - 81f''(1)^2 - 108f''(1)}{24\lambda_k^4}(\lambda_s-\lambda_k)^2 + \mathcal{O}\left((\lambda_s-\lambda_k)^3\right) \\
\mathcal{S}_{klk} &= \frac{3\,(8f''(1)+1)}{8\lambda_k^2} - \frac{3\,(8f''(1)+1)}{8\lambda_k^3}(\lambda_l-\lambda_k) + \\
&\quad + \frac{80f^{(4)}(1) - 432f''(1)^2 - 138f''(1) + 27}{96\lambda_k^4}(\lambda_l-\lambda_k)^2 + \mathcal{O}\left((\lambda_l-\lambda_k)^3\right)
\end{aligned} \tag{21}$$

Einstein sokaságok esete I.

Definíció

Egy (M,g) szemi-Riemann sokaság Einstein-sokaság, ha

$$\exists\lambda \in C^{\infty}(M,\mathbb{C}) \quad \mathfrak{Ric} = \lambda \cdot g. \tag{22}$$

Tétel

Ha (M,g) Einstein-sokaság, $dim M \geq 3$, akkor a sokaság skalár görbülete $(\mathcal{S}cal)$ konstans, és

$$\mathfrak{Ric} = \frac{\mathcal{S}cal}{Dim(M)} \cdot g. \tag{23}$$

Einstein sokaságok esete II.

Tétel

Ha az $(\mathcal{M}_{n,sa}, g)$ Riemann sokaság metrikáját egy $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvény származtatja, akkor az nem lehet Einstein-sokaság.

Bizonyítás. Ricci-tenzor és a metrika lokális alakja a legkevertebb állapotban $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{3n^2(1+8f''(1))}{2} &= 0 \\ \frac{3n^3(1+8f''(1))}{4} &= 2n \end{aligned} \tag{24}$$

$\Rightarrow n = 0$ **Q.E.D.**

Szimulációk az $\mathcal{M}_{2,sa}$ téren (egy példa) I.

A $T_D\mathcal{M}_{2,sa}$ érintőtér egy bázisa:

$(x^1, x^2, x^3, x^4) = (\frac{1}{2}F_{11}, \frac{1}{2}F_{22}, \frac{1}{2}F_{12}, \frac{1}{2}H_{12})$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x^4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

A Ricci-tenzor mátrixa a fenti bázisban:

$$\mathfrak{Ric} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{112} & \mathcal{R}_{12} & 0 & 0 \\ \mathcal{R}_{12} & \mathcal{S}_{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{S}_{121}+\mathcal{S}_{212}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathcal{S}_{121}+\mathcal{S}_{212}}{2} \end{pmatrix} \tag{25}$$

Szimulációk az $\mathcal{M}_{2,sa}$ téren (egy példa) II.

Ha $D = \mathrm{diag}\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, akkor a tenzorkomponensek alakja:

$$\mathcal{R}_{12} = -\frac{3}{2\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^2}$$

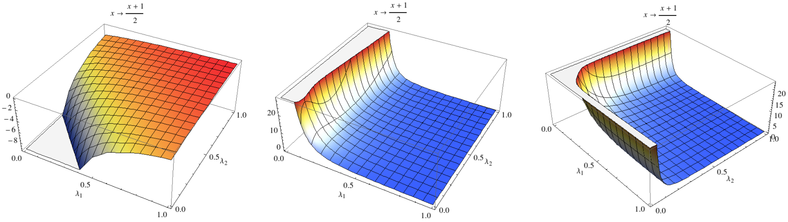
$$\mathcal{S}_{112} = \frac{9\lambda_1^4 + 48\lambda_2\lambda_1^3 - 10\lambda_2^2\lambda_1^2 + \lambda_2^4}{32\lambda_1^4\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^2}$$

$$\frac{\mathcal{S}_{121}+\mathcal{S}_{212}}{2} = \frac{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\left(-\frac{\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^3}{\lambda_1^2\lambda_2^2} + 3\left(\lambda_1+\lambda_2\right) + 3\right) - 8}{4\left(\lambda_1+\lambda_2\right)^3} \tag{26}$$

Szimulációk az $\mathcal{M}_{2,sa}$ téren (egy példa) III.

A legkisebb metrikát generáló operátormonoton függvény:

$$f(x) = \frac{1+x}{2}.$$



$\mathcal{R}_{12}(\lambda_1, \lambda_2)$ $\mathcal{S}_{112}(\lambda_1, \lambda_2)$ $\frac{\mathcal{S}_{121}(\lambda_1,\lambda_2)+\mathcal{S}_{122}(\lambda_1,\lambda_2)}{2}$

1. ábra. Ricci-tenzor független komponensei

Eddigi eredményeink

1. A továbblépéshez szükséges mennyiségeket ($\Gamma, \mathfrak{R}, \mathfrak{Ric},$ stb.) kiszámoltuk.
2. $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}} \Rightarrow (\mathcal{M}_{n,sa}, c_f)$ nem Einsten sokaság.
3. A Ricci tenzornak nem lehet nemkommutativ kovariancia jelentése. (legalábbis nem D-ben)
4. Sejtés(ek) arra vonatkozóan, hogy mi $\mathfrak{Ric}$ információgeometria jelentése.

Nyitott kérdések

1. Az $n \times n$-es sarokminor milyen jelentést hordoz?
2. Van-e olyan bázis, amelyben $\mathfrak{Ric}$ és g egyaránt diagonális $\forall f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$-re?
3. Tekinthető-e $\mathfrak{Ric}$ egy $D \mapsto \tilde{D}$ mértékcserélt kvantum kovarianciának?
4. Két metrika között fennálló egyenlőtlenség indukál-e (és ha igen, akkot milyen irányút) egyenlőtlenséget a metrikákból származó Ricci-tenzorokon?
5. Van-e az Einstein-egyenlethez hasonló PDE, ami bármilyen $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{op}}$ függvényből származó metrika és Ricci-tenzor teljesít?

Felhasznált irodalom

- Andai Attila, Információgeometria a kvantummechanikában, doktori értekezés, 2003.
- Attila Andai. Uncertainty principle with quantum Fisher information. arXiv:math-ph/0707.1147v1, 2007.
- A. Lovas, A. Andai., Geometry behind Robertson type uncertinty principles., arXiv:1311.5069.
- D. Petz and Cs. Sudár, On the curvature of certain Riemannian space of matrices, *J. Math. Phys.*, **37**, 2662-2663, 1996.

Köszönöm a figyelmet!

A belső bíráló kérdése

A kapott információgeometriai eredmények értelmezhetők-e a klasszikus (kommutatív) információgeometria keretein belül?

A külső bíráló kérdései

1. A dolgozat matematikai és formula-manipulációs eredményeiből levonható-e következtetés valamilyen fizikai jelenségre vonatkozóan?
2. Van-e lehetőség C*-algebra feletti nyom-forma által meghatározott „kvantummechanikai állapottér" feletti nem triviális (például Cenzov–Morozova típusú) Riemann-metrikák értelmezésére és azok érdemi vizsgálatára? (Esetleg speciális típusú, de nem véges dimenziós C^*-algebrák esetében.)