

Holló László  
Szakdolgozat

# Lie csoportok projektív ábrázolásai a kvantummechanikában

Témavezető: Dr. Andai Attila

Az előző fejezetben a négy és több térdimenziós Galilei-csoport összes folytonos, irreducibilis projektív ábrázolását sikerült visszavezetnünk egy kompakt Lie-csoport, az  $SO(n)$  unitér ábrázolásaira. Ez egy sokkal egyszerűbb feladat, és minden  $n$  értékekre jól ismert.

Ezzel a dolgozattal teljessé vált a Galilei csoportok projektív reprezentációjának elmélete, minden legalább két térdimenziós Galilei-csoport összes folytonos, irreducibilis projektív ábrázolása ismert. Ezen dolgozat, valamint [1] alapján az ábrázoló operátor három és több dimenzióban hasonló szerkezetű, minden  $(R, \tau, \mathbf{v}, \mathbf{u}) \in SO(n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) és  $f \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mathbf{x}, \mathcal{K})$  tetszőleges függvény esetén, ha  $m^s$  az  $SO(n)$  csoport egy folytonos, irreducibilis, unitér ábrázolása egy  $\mathcal{K}$  Hilbert-téren, akkor az ábrázoló operátor

$$W_{(1,\tau,\mathbf{0},\mathbf{0})}^\mu = e^{-i\frac{\tau}{2\mu}\Delta},$$
$$(W_{(R,0,\mathbf{v},\mathbf{u})}^\mu f)(x) = e^{-i\mu(\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle)} f(R^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{u}))$$

lesz. A két térdimenziós Galilei-csoport esetén az ábrázoló operátor bonyolultabb szerkezetű, ugyanis már a kommutátor kociklusok kohomológiaosztályai sem egy, hanem három számmal indexelhetők, részletesen a [3] foglalkozik ezzel.

A dolgozatban végén láttuk, hogy a Schrödinger-egyenlet homogén zérus potenciál esetén levezethető a téridő szimmetria-csoportjának ábrázolásaiból, azaz, hogy az időbeli eltolás infinitezimális generátora a teljes kinetikus energia.

## References

- [1] V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory, Second Edition*, Chapter 8, Springer, New York, 2007.

- [2] Matolcsi T., Székely S., *Matematikai fizika I.*, VI-VII. felyezet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [3] D. R. Grigore, „The projective unitary irreducible representations of the Galilei group in  $1 + 2$  dimensions” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 37, no. 1, pp. 460–473, 1996.
- [4] Andai Attila, diplomamunka, *A kvantummechanika matematikai alapjairól*, ELTE Természettudományi Kar, Alkalmazott Analízis Tanszék, 1998.
- [5] Kristóf János, *A matematikai analízis elemei IV.*, 419–424. oldal és 304–306. oldal, ELTE, Budapest, 1998.