

Ács Borbála: Spektrálsugár és együttes spektrálsugár című szakdolgozatának kivonata

Szakdolgozatomban az általánosított spektrálsugár és az együttes spektrálsugár összefüggéseit vizsgálom. Először ezek megértéséhez szükséges alapvető fogalmakat vezetem be és ismertetem azok alaptulajdonságait a rájuk vonatkozó tételeken keresztül egy bevezető fejezet után.

A második fejezetben a normált terekkel és a folytonos lineáris leképezések terével foglalkozom, kicsit részletesebben a p -normával, maximum-normával, illetve az operátor-normával.

A harmadik fejezetben ismertetem az algebra, normált algebra és Banach-algebra definícióját, valamint ezek speciális típusait. Több példát említek normált/Banach-algebra konstrukcióra. Ezután egységelemes algebra elemének spektrumát, rezolvens halmazát és rezolvens függvényét írom le. Kimondom a spektrumhoz kötődő Jacobson-lemmát. Ismertetem a Carl–Neumann-féle sorfejtést, valamint pár következményét, melyek segítségével lehetőség nyílik garantálni elemek inverzének létezését Banach-algebrákban. Végül az invertálható elemek halmazának a nyíltságát igazolom Banach-algebrában.

A negyedik fejezetben a mátrix-normákhoz kötődő főbb definíciókat és tételeket ismertetem. Bevezetem a mátrix-norma, indukált mátrix-norma és illeszkedő normák fogalmát. Ezt követően megadom, hogy mely normák indukálják a mátrixok terén a sor-, az oszlop- és a spektrálnormát.

Az ötödik fejezet a spektrálsugárról szól. Megmutatom, hogy a spektrálsugár határértékként is előállítható. Leírom a spektrálsugár főbb műveleti tulajdonságait. Végül a spektrálsugár minimalitási tulajdonságát igazolom a Rickart-tétel segítségével.

A hatodik fejezetben azt taglalom, hogy mátrixok egy halmazán a spektrálsugár fogalmát kétféle módon definiálhatjuk. Egyik esetben a spektrálsugár, a másik esetben a mátrixnormák alapján. Az általánosított spektrálsugár (GSR) és az együttes spektrálsugár (JSR) definíciója pont ezeken alapul. Mivel a mátrixnormák és a spektrálsugár közötti összefüggés nem triviális, így az általánosított és együttes spektrálsugár közötti kapcsolat sem egyértelmű. Bergernek és Wangnak sikerült elsőként igazolni a kétféle spektrálsugár egyenlőségét bizonyos speciális mátrixhalmazok esetén.

Ehhez kapcsolódóan mátrixok halmazának spektrálsugarának alakulását jellemező tételt, lemmákat ismertetek. Megmutatom, hogy az együttes spektrálsugár a norma választásától független. Ezt követően pedig a mátrixok egy speciális halmazát vizsgálom, melyre igazolom, hogy az általánosított spektrálsugára nem egyezik meg az együttes spektrálsugarával.

Budapest, 2016. december

Ács Borbála