Szakdolgozat

Determinisztikus rendszerek modellterének redukálása nemlineáris időfejlődés esetében

Hallgató: Mészáros Botond, ELTE-TTK Fizika BSc.

Szakdolgozati témavezető: Dr. Andai Attila, BME-TTK
Belső konzulens: Dr. Nagy Márton, ELTE-TTK
Informatika TDK témavezető: Dr. Burcsi Péter, ELTE-IK

2022.05.30.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Valós rendszerek modellezése során gyakran csak néhány mennyiség időbeli fejlődését szeretnénk nyomon követni: egy fizikai kiterjedéssel rendelkező test helyzetét és impulzusát, járvány során az egészséges, felépült, immunitással rendelkező vagy fertőzött emberek számát, esetleg utóbbiak fertőzőképességét, gazdaság esetében néhány termék árának változását, csak, hogy néhány példát említsek. Mégis, a vizsgálni kívánt mennyiségek időbeli változását gyakran nem lehet egyszerűen nyomon követni – legalábbis egyáltalán nem nyilvánvaló módon –, ezért összetettebb, számos új paraméter időfüggését is leíró modelleket alkotunk, és az új, időfüggő paraméterek segítségével bontjuk tagokra és értjük meg a keresett mennyiségek változásáért felelős mechanizmusokat.

Bár minél összetettebb egy modell, annál nagyobb eséllyel képes helyesen leírni a tényleges vizsgált jelenséget, továbbra is fennáll, hogy a modell komplexitásáért felelős paraméterek nagyobb részére tulajdonképpen nem vagyunk kíváncsiak, azokat *kényszerből*, a biztosabb eredmény és a belső mechanizmusok megértése érdekében vezettük be. Kérdés tehát, hogy ha egy sokváltozós, jól működő modell adott, mellyel csak néhány paraméter időfejlődését akarjuk leírni, találhatunk-e ez alapján olyan, kevesebb paraméterből álló modelleket, melyek hasonló sikerrel képesek leírni a vizsgált mennyiségek időfüggését, egy vizsgált időintervallumban. Dolgozatom egyik fő célja választ találni e kérdésre, oly módon, hogy az praktikusan is alkalmazható, leprogramozható eljárás legyen. Ennek érdekében az eredményeket az absztrakt formán túl a számítástechnikában gyakran alkalmazott lineáris algebra eszköztárával felírva is megadom, segítve a tényleges implementációt.

A dolgozat első fejezetében röviden összefoglalom az affin- és Euklideszi terek néhány alapvető tulajdonságát, melyeknek köszönhetjük azok alkalmasságát modellezési szempontból. A második fejezetben bevezetem a dolgozat első felének egészében használt jelölésrendszert, majd megfogalmazom magát a problémát is abban a formában, amelyben választ szeretnék rá találni. A harmadik fejezetben néhány lépésben megoldom formálisan a problémát, kitérve az alkalmazások szempontjából lényeges kérdésekre. Megvizsgálom azt az esetet is, ha a korlátos számítási kapacitás miatt csak közelítő megoldást adunk (hiszen nem zárt alakban adott leképezést tipikusan közelíteni tudunk), mely esetben hibabecslést adok. Tárgyalom az eljárás alkalmazásának feltételeit és a megkonstruálás módszerének előnyeit. A fejezetet néhány fizikai eredetű gondolattal zárom, mellyel motiválni igyekszem az általánosabb modellezési keretrendszer, a Riemann-sokaság bevezetését.

A dolgozat negyedik fejezetében röviden áttekintem a topologikus terek, illetve topologikus-, sima- és (pszeudo)Riemann-sokaságok fő tulajdonságait, igyekezve arra, hogy a megjelenő definíciók mellé indoklás is kerüljön. Az ötödik fejezetben megadok egy lehetséges módszert, mellyel a dolgozat első felében tekintett eljárás általánosítható (pszeudo)Riemann-sokaságok közötti leképezésekre is. Végül, összefoglalom munkám eredményeit és köszönetet mondok a kutatást lehetővé tevő személyeknek, közösségeknek és programoknak a támogatásért.

Összefoglalás

Dolgozatom középpontjában adott terek közötti, általában nemlineáris leképezések gráfjainak kommutatív diagrammá való kiegészítésének kérdése állt. A kérdés redukálható arra az esetre, amikor a gráfban pusztán egy új él elhelyezésével köröket alakíthatunk ki; így elegendő három- vagy négyszögekkel foglalkozni, egy hiányzó éllel. Munkám eredményéül sikerült megoldanom a feladatot, ha az egyes terek Riemann-sokaságok (speciálisan Euklideszi terek), algoritmust adva a lokálisan legkisebb eltérést adó megoldás megkonstruálására, ami sima és analitikus leképezések esetében egzakt megoldást ad. Ennek hibáját is becsültem. A megoldásnak komplex rendszerek dimenzióredukált modellezésén túl alkalmazásai lehetnek az algebrai topológiában és a kategóriaelméletben, ahol nagy jelentőségűek a kommutatív diagramok, bár e kérdés vizsgálata túlmutatott jelen dolgozat céljain.

Hogy rámutathassak a kérdés fontosságára, és az olvasó számára motiválni tudjam a bevezetett fogalmakat, általánosításokat, a megjelenő terek egyikét egy determinisztikus rendszer modellterével, egy leképezést pedig e rendszer időfejlődését megadó operátorral azonosítottam. Ebben az értelmezésben a dolgozatomban megoldott feladat a következőt is jelentette: ha adott egy nagyszámú paraméterrel leírt rendszer időfejlődése és egy eljárás, amivel a rendszer egy pillanatnyi állapotából meghatározható egy (gyakran alacsonyabb dimenziós) mennyiség, úgy megkonstruálható az időfejlődést megadó leképezés ezen mennyiségek terén. A módszer így alkalmas nemlineáris időfejlődő determinisztikus rendszerek modellterének redukálására. Fizikai példa erre nagy szabadsági fokú rendszerek véges sok (hidrodinamikai, termodinamikai vagy statisztikus) tulajdonságának az időbeli leírása, melynek pont a nemlinearitás az egyik legnagyobb nehézsége. Az eljárás gyakorlati jelentőségét szemlélteti, hogy azt időben fejlődő rendszerek modellterének dimenzióredukciójára alkalmazva drasztikusan csökkenhet az eljárás idő- és memóriakomplexitása.

Köszönet

Szeretnék köszönetet mondani barátaimnak, a Bolyai Kollégium, az Eötvös József Collegium és a Márton Áron Szakkollégium közösségének szellemi támogatásáért, melynek hála e kutatás megvalósulhatott. A kutatás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-21-1 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült, illetve az ELTE Márton Áron Szakkollégiumának anyagi támogatásával. Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Andai Attilának és belső konzulensemnek, Dr. Nagy Mártonnak a folyamatos támogatásukért, amik a szakdolgozat megvalósításában és a világról alkotott szemléletmódom formálásában kitartóan szerepet vállaltak. Szeretnék köszönetet mondani Dr. Burcsi Péternek a kutatásaimban való három éves útmutatásáért.

Végezetül, hálával tartozom családomnak minden területen nyújtott folyamatos támogatásukért, mely nélkül nem valósulhatott volna meg e kutatás.

Hivatkozások

[1] Roger Pensrose. A generalized inverse for matrices. 1955.

[2] John Archibald Wheeler Charles W. Misner, Kip S.Thorne. *Gravitation*. Princeton University Press, 1970.

[3] Feynman's lecture: Angels beating their wings to push the planetsdiscovery of the law of gravitation. https://www.youtube.com/watch?v=clGrg-ANSQE. Hozzáférve: 2021-01-22.

[4] A new theory for systems that defy newton's third law. https://www.quantamagazine.org/a-new-theory-for-systems-that-defy-newtons-third-law-20211111/. Hozzáférve: 2021-11-23.

[5] Anthony Zee. *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press, 2013.

[6] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.

[7] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2011.