

Tudományos Diákköri Konferencia

2021

A gömbfelület kvantumos elemi részecskéinek meghatározása reprezentációelmélet alkalmazásával

Fitos Bence

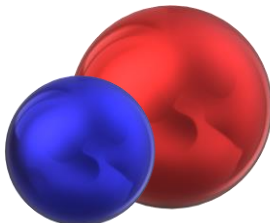
Témavezető: Dr. Andai Attila, egyetemi docens

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Természettudományi Kar

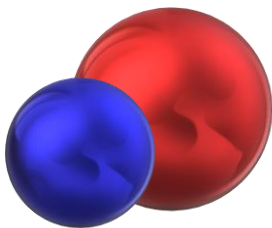


M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2



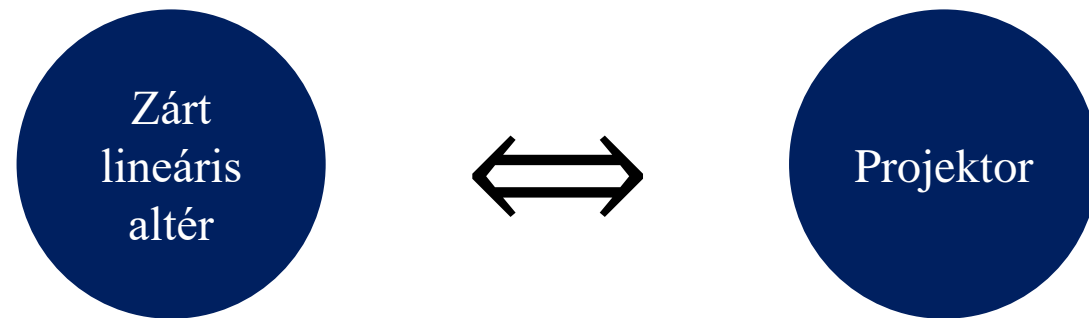
- Reprezentációelmélet a kvantummechanikában
- Gömbfelszín téridőmodellje
- Ábrázolások meghatározása
- (Kitekintés)

*A **Tétel**-lel megjelölt állítások saját eredmények.*

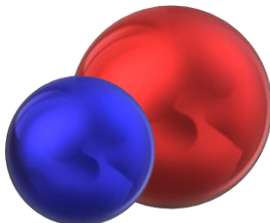
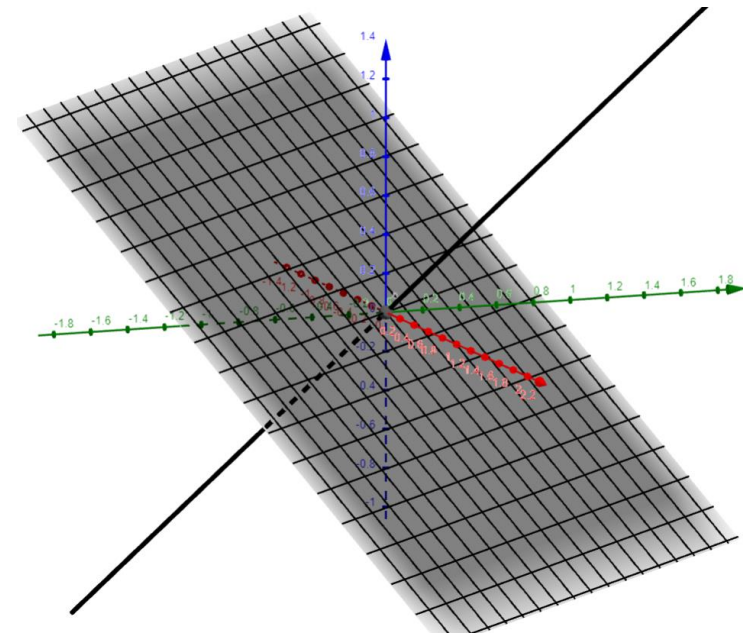


Kvantummechanika – Kvantum logika

- Neumann-féle axiómarendszer
- Fizikai esemény – komplex Hilbert-tér zárt lineáris altere
- $E \vee F := \overline{\text{Span}(E \cup F)}$
- $E \wedge F := E \cap F$
- $E^\perp := \{x \in \mathcal{H} \mid \forall y \in E : \langle x, y \rangle = 0\}$



- $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \vee, \wedge, \cdot^\perp)$ **projektornáló** (ortomoduláris σ -háló)



Téridő és kvantummechanika

- Téridő modell: differenciálható sokaság + szimmetriacsoport

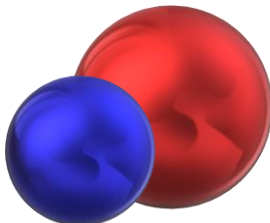
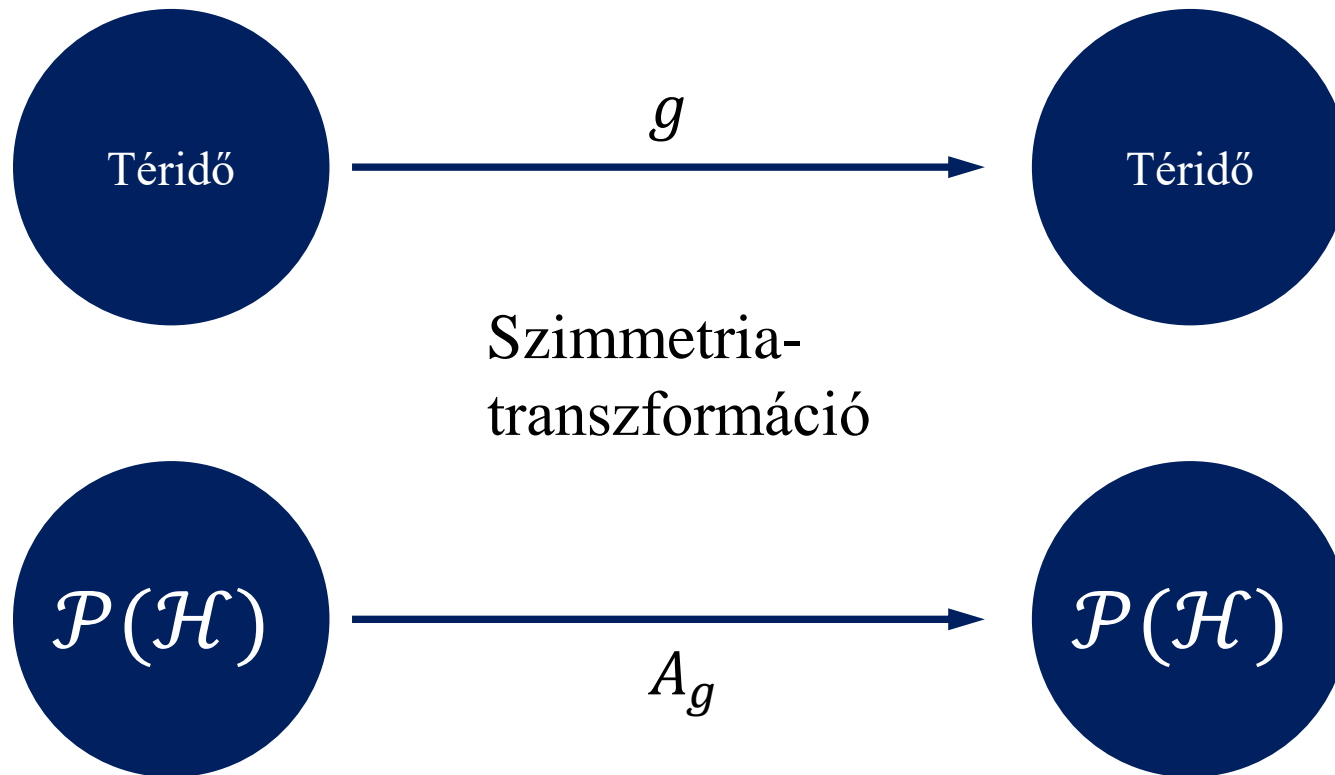
- **Szimmetriacsoport:** G

$$\forall g, h \in G$$

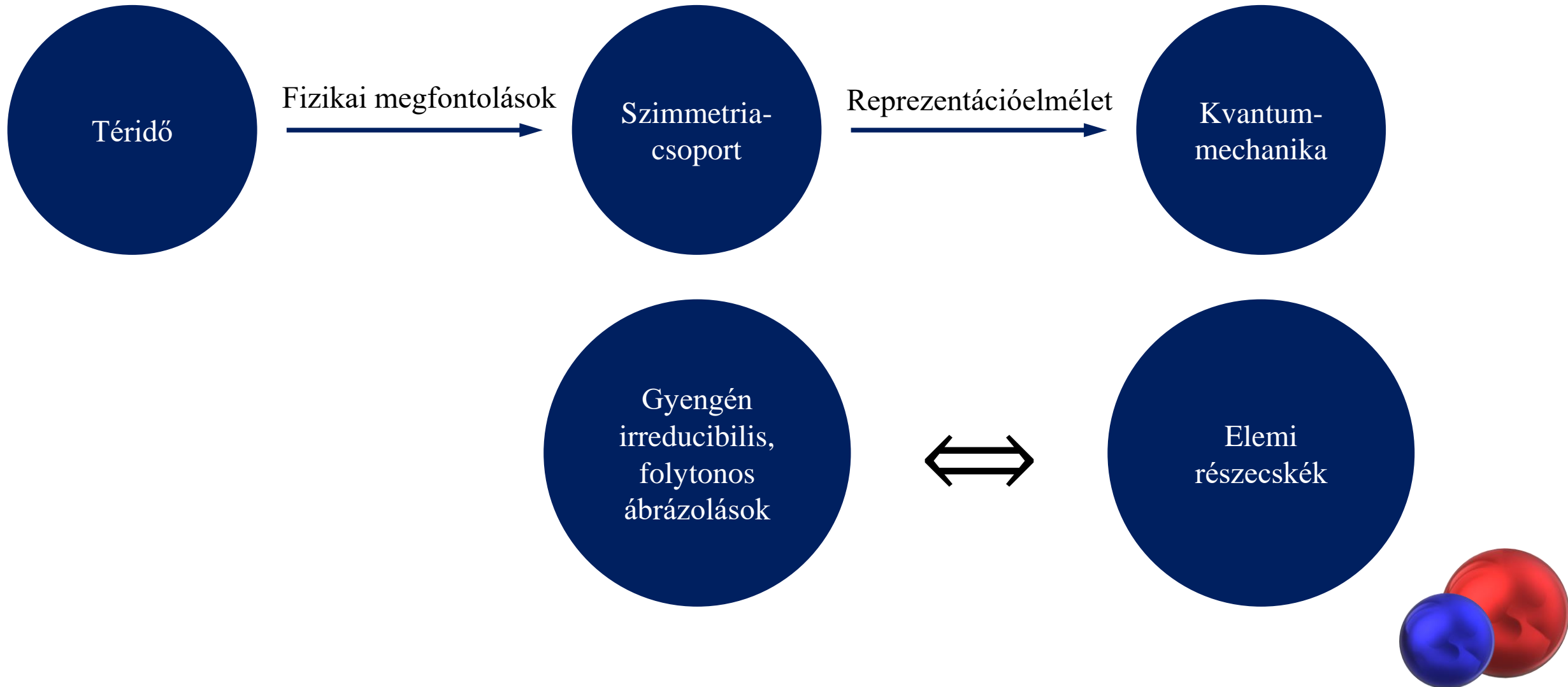
$$A_g A_h = A_{gh}$$

$$A : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{P}(\mathcal{H}))$$

A G csoport **projektív ábrázolása**.

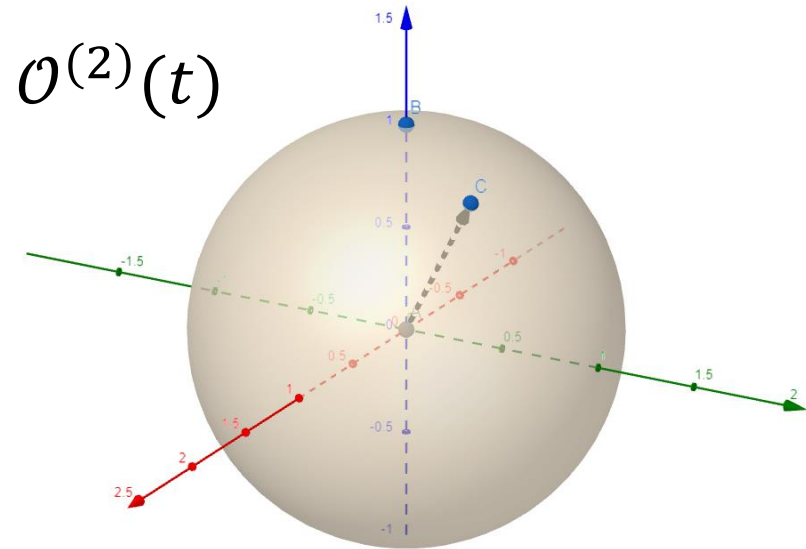


Téridő és kvantummechanika



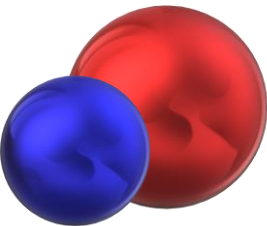
Gömbfelszín téridő-modellje

- Tér: $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$
 - Idő: \mathbb{R}
 - Téridő: $\mathbb{R} \times S_2$
- **Tér-transzlációk: $SO(3)$**
- **Idő-transzlációk: $(\mathbb{R}, +)$**
- **Áttérés forgó rendszerbe: $Lie(SO(3))$**
- Forgó rendszerbe való áttérések kompozíciója?
 - $\exp(t\vec{\omega}_1 \times \cdot)\exp(t\vec{\omega}_2 \times \cdot) = \exp(t(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \cdot) + \mathcal{O}^{(2)}(t)$
 - „Infinitezimális” forgatások



Gömbfelszín téridő-modellje

- $\mathbb{R}^3 \cong \text{Lie}(\text{SO}(3)) : \vec{\omega} \mapsto \vec{\omega} \times \cdot$
- $\tilde{q} : \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (R, \vec{\omega}) \rightarrow \tilde{q}_R \vec{\omega} = R \vec{\omega}$
- $\text{SO}(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3$
$$(R_1, \vec{\omega}_1) \cdot (R_2, \vec{\omega}_2) = (R_1 R_2, \vec{\omega}_1 + R_1 \vec{\omega}_2)$$
- További egyszerűsítés: az időeltolások triviálisan csatolódnak
- **A csoport:** $(\text{SO}(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$



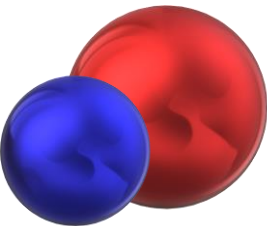
$(SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ csoport ábrázolásai

- **Tétel:** Az $(SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ gyengén irreducibilis folytonos projektív ábrázolásai azonosíthatók a folytonos irreducibilis unitér ábrázolásaival:

$$A_g(P) = U_g P U_g^{-1}.$$

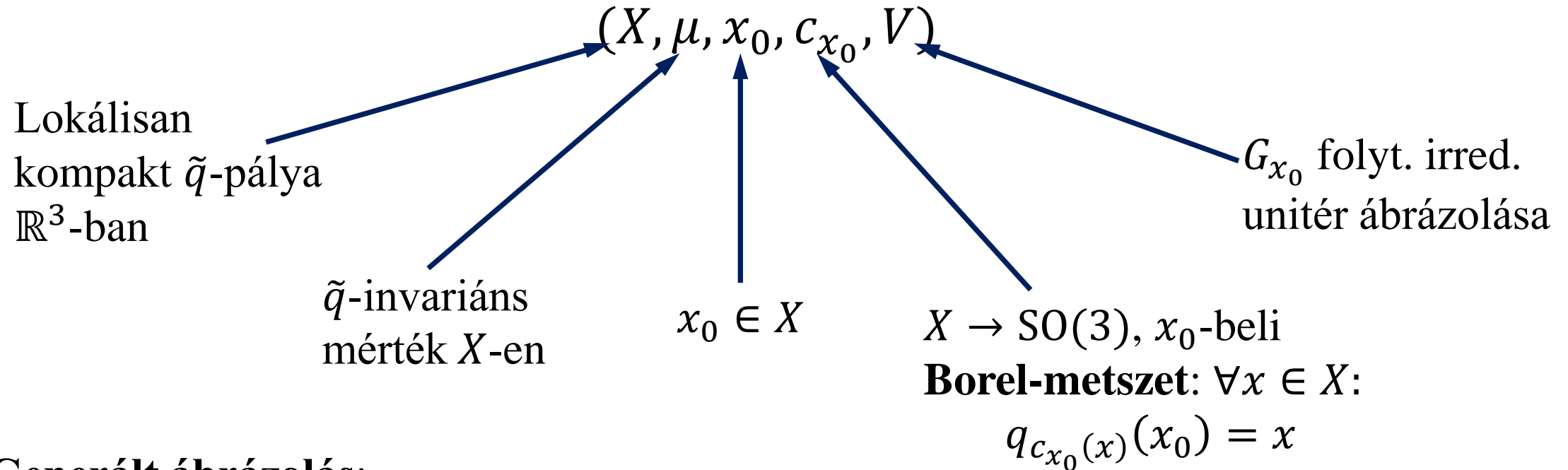
- **Irreducibilis unitér ábrázolások:**
- $(SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ folytonos irreducibilis unitér ábrázolásait megfeleltethetjük olyan (m, U) pároknak, melyekre $m \in \mathbb{R}$, és U az $SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3$ csoport egy folytonos irreducibilis unitér ábrázolása.
- Ábrázoló operátorok:

$$\begin{aligned} \hat{U} : (SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R} \times W &\rightarrow W \\ (A, \tau, \psi) &\mapsto \hat{U}_{(A, \tau)} \psi := e^{im\tau} U_A \psi. \end{aligned}$$



$SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3$ csoport unitér ábrázolásai

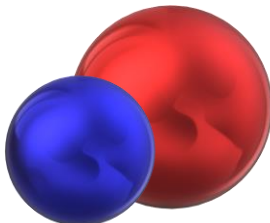
- **Mackey-féle indukált ábrázolások módszere**



Generált ábrázolás:

$$U : (SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times L^2(X, \mu, W) \rightarrow L^2(X, \mu, W), \quad (R, \vec{\omega}, \psi) \mapsto U_{(R, \vec{\omega})} \psi,$$

$$(U_{(R, \vec{\omega})} \psi)(x) := e^{i\vec{\omega} \cdot x} \cdot V \left(c_{x_0}(x)^{-1} R c_{x_0}(R^{-1}x) \right) \psi(R^{-1}x)$$



$SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3$ csoport unitér ábrázolásai

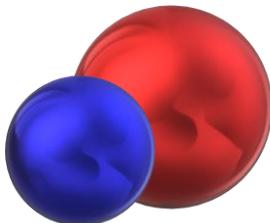
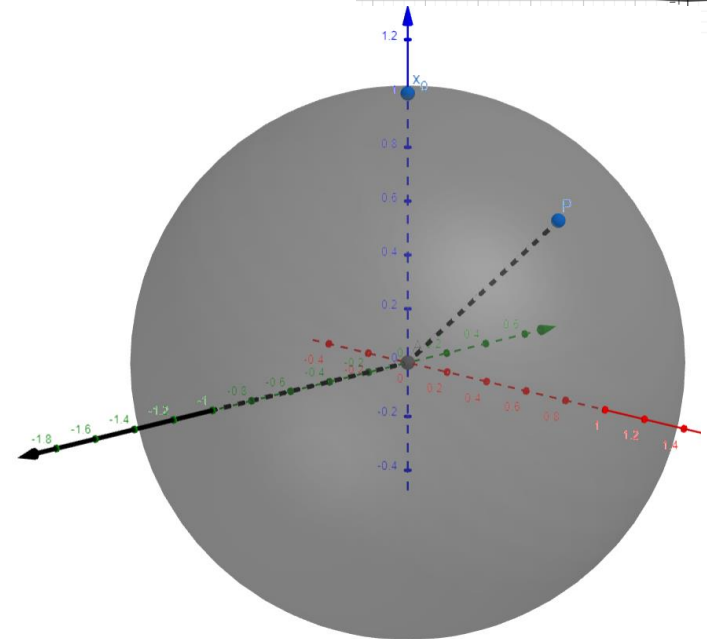
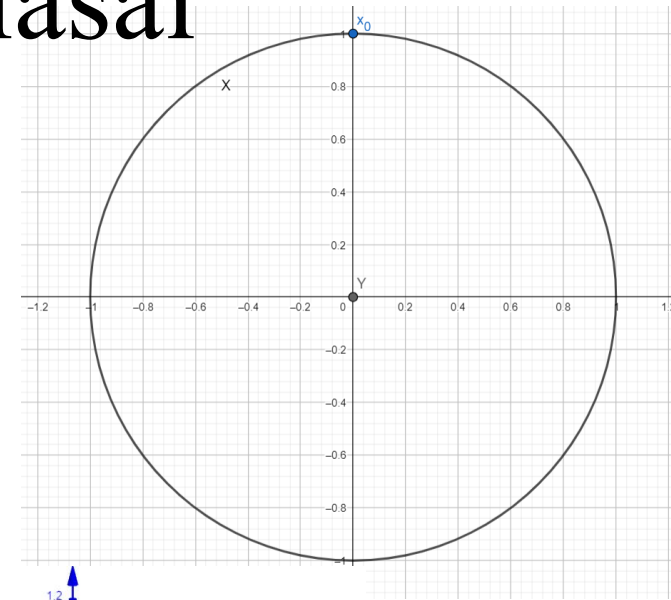
- Pályák ($r \in \mathbb{R}^+$):

$$X^r := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = r\}$$

$$Y := \{0 \in \mathbb{R}^3\}$$

- μ_r : normált Lebesgue-mérték a gömbfelszínen
- $x_0^r := (0, 0, r)$

$$c_{x_0}^1(x) = \begin{pmatrix} x_3 + \frac{x_2^2}{1+x_3} & -\frac{x_1 x_2}{1+x_3} & x_1 \\ -\frac{x_1 x_2}{1+x_3} & x_3 + \frac{x_1^2}{1+x_3} & x_2 \\ -x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$



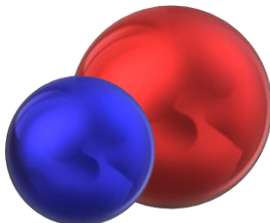
$SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3$ csoport unitér ábrázolásai

- Stabilizátorok és ábrázolásuk:

- x_0^r stabilizátora: $SO(2) \cong \mathbb{T}$. \mathbb{T} ábrázolásai egy $n \in \mathbb{Z}$ számmal indexelhetők:

$$\begin{aligned} \zeta^n : \mathbb{T} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (q, z) &\mapsto \zeta_q^n z := q^n z \end{aligned}$$

- $x_0^0 = (0,0,0)$ stabilizátora a teljes $SO(3)$. $SO(3)$ ábrázolásai $\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ számmal indexelhetők (D^σ), és $\mathbb{C}^{2\sigma+1}$ téren valósulnak meg.



$(SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ csoport ábrázolásai

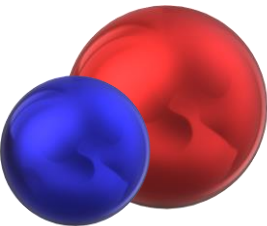
Tétel: Az $(SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ csoport folytonos irreducibilis unitér ábrázolásai a következők:

- X^r pályához tartozó ábrázolásokat $(m, r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}$ számhármassal indexelhetjük. Az ábrázoló operátorok

$$U^{m,r,n} : \left((SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R} \right) \times L^2(S_2, \mu, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(S_2, \mu, \mathbb{C}),$$
$$(R, \vec{\omega}, \tau, \psi) \mapsto U_{(R, \vec{\omega}, \tau)}^{m,r,n} \psi,$$
$$\left(U_{(R, \vec{\omega}, \tau)}^{m,r,n} \psi \right) (x) := e^{im\tau} e^{ir\vec{\omega} \cdot x} \cdot \zeta^n \left(c_{x_0}^1(x)^{-1} R c_{x_0}^1(R^{-1}x) \right) \psi(R^{-1}x).$$

- Y pályához tartozó ábrázolásokat $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \frac{1}{2} \mathbb{N}$ számpárral indexelhetjük. Az ábrázoló operátorok

$$U^{m,\sigma} : \left((SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R} \right) \times \mathbb{C}^{2\sigma+1} \rightarrow \mathbb{C}^{2\sigma+1},$$
$$(R, \vec{\omega}, \tau, \psi) \mapsto U_{(R, \vec{\omega}, \tau)}^{m,\sigma} \psi,$$
$$U_{(R, \vec{\omega}, \tau)}^{m,\sigma} \psi := e^{im\tau} \cdot D_R^\sigma \psi.$$



Lie-algebra X^r pályához tartozó lineáris ábrázolása

Tétel: $(m, r, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{Z}$ számhármashoz tartozó lineáris ábrázolás infinitezimális generátorai:

- **Időfejlesztő operátor:** $H^m = m$.
- **Forgó rendszerbe való áttérés infinitezimális generátorai**

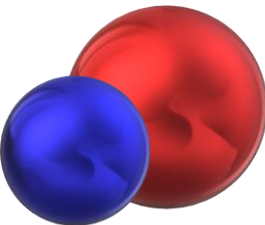
$$K_i^r \psi(x) = r x_i \psi(x), \quad \psi \in L^2(S_2, \mu, \mathbb{C}).$$

- **Térbeli transláció infinitezimális generátorai**

$$S_1^n \psi(x) = \left(n \frac{x_1}{1 + x_3} - \frac{1}{i} (x \times \nabla)_1 \right) \psi(x)$$

$$S_2^n \psi(x) = \left(n \frac{x_2}{1 + x_3} - \frac{1}{i} (x \times \nabla)_2 \right) \psi(x)$$

$$S_3^n \psi(x) = \left(n - \frac{1}{i} (x \times \nabla)_3 \right) \psi(x).$$



Kitekintés

- \mathcal{M} differenciálható sokaság, g metrikus tenzormező, $p \in \mathcal{M}$.
- $A_1^1(\mathcal{M}, p)$: p -ben értelmezett antiszimmetrikus 1-1 tenzorok.

$$\mathcal{A}_p := A_1^1(\mathcal{M}, p) \oplus T_p(\mathcal{M})$$

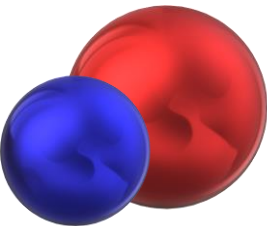
$$[(S_1, 0), (S_2, 0)]_p := (S_1 S_2 - S_2 S_1, 0)$$

$$[(S, 0), (0, P)]_p := (0, SP)$$

$$[(0, P_1), (0, P_2)]_p := (R(P_1, P_2), 0)$$

- Feltétel:

$$[R(P_1, P_2), S]_p = R(SP_2, P_1) - R(SP_1, P_2)$$

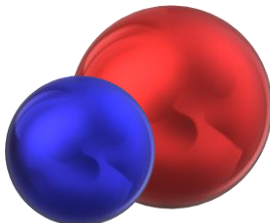




Köszönöm a figyelmet!

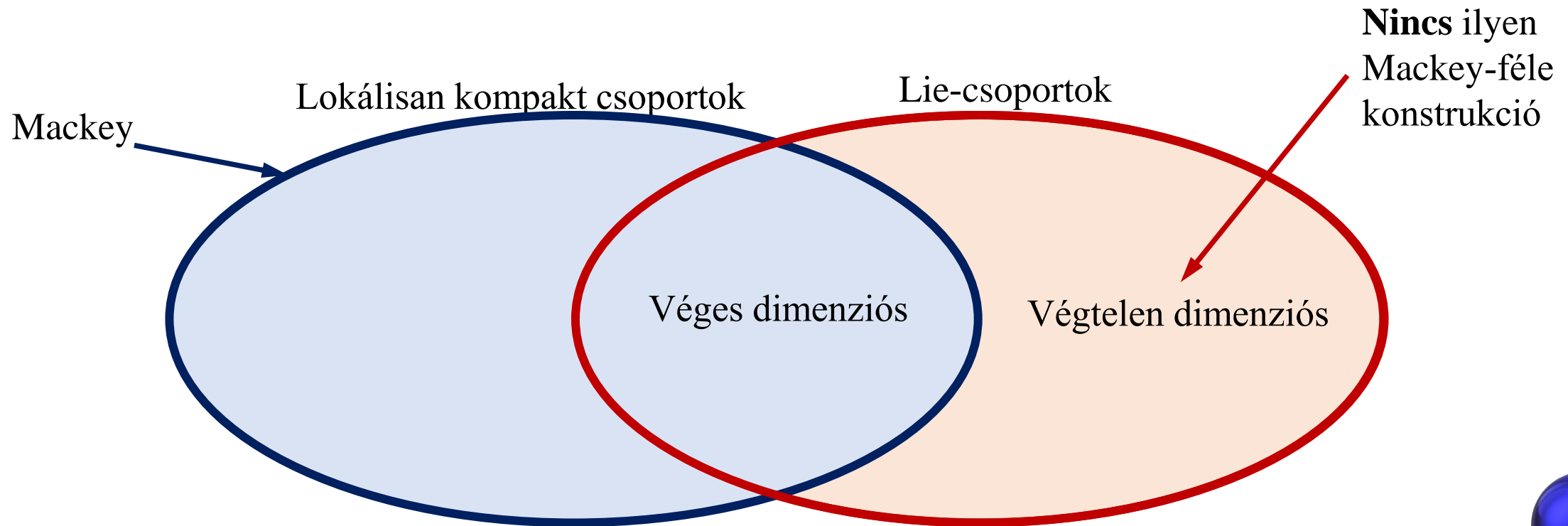
Fontosabb irodalomjegyzék

- [1] Andai Attila, diplomamunka, *A kvantummechanika matematikai alapjairól*, ELTE Természettudományi Kar, Alkalmazott Analízis Tanszék, 1998.
- [2] D. R. Grigore. The projective unitary irreducible representations of the Galilei group in 1+2 dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 37, 460, 1996.
- [3] D. R. Grigore. The Projective Unitary Irreducible Representations of the Poincaré Group in 1+2 Dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 34, 4172, 1993.
- [4] Kristóf J.. *A matematikai analízis elemei V*. Online jegyzet: <https://web.cs.elte.hu/~krja/>
- [5] Lévay P.. *Modified Symmetry Generators and the Geometric Phase*, J. Phys. A27 2857, 1994.
- [6] Matolcsi T., Székely S.. *Matematikai Fizika I*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [7] Matolcsi T.. *Matematikai Fizika II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
- [8] V. S. Varadarajan. *Geometry of Quantum Theory*. New York: Spriger-Verlag, 1985.

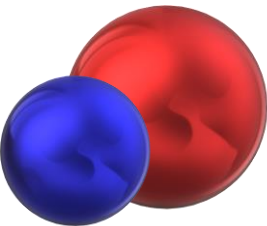


Válasz a Bíráló kérdéseire

- *Létezik-e a Mackey-féle konstrukció olyan verziója mellyel végtelen dimenziós Lie algebrák centrális kiterjesztései is tárgyalhatók? (Pl. Viasoro algebrák ($\text{Diff}(S^1)$))*



- *Mi lehet a kapcsolat a [5] 6.20- 6.21 egyenletek, és a jelen konstrukcióban kiszámolt S_1^n , S_2^n , S_3^n operátorok által meghatározott operátoralgebra közt?*
- $SO(3)/SO(2) \cong S_2$
- [2] 3.39 egyenletben megjelenik szintén mágneses tulajdonságokkal összefüggésbe hozható tag. A mágneses tulajdonság a tér dimenziójával hozható kapcsolatba.



Gömbfelszín téridő-modellje

- Tér: $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$ ➤ **Tér-transzslációk: $SO(3)$**
- Idő: \mathbb{R} ➤ **Idő-transzslációk: $(\mathbb{R}, +)$**
- Téridő: $\mathbb{R} \times S_2$ ➤ **Áttérés forgó rendszerbe: $Lie(SO(3))$**

$$R \in SO(3): (t, x) \mapsto (t, Rx)$$

$$\tau \in \mathbb{R}: (t, x) \mapsto (t + \tau, x)$$

$$\omega \in Lie(SO(3)): (t, x) \mapsto (t, \exp(t\omega)x)$$

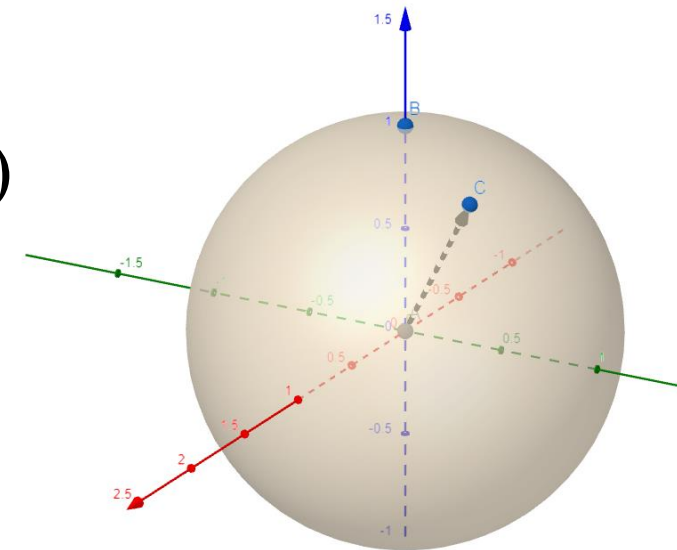
- Két forgó rendszerbe való áttérés: $\omega_1, \omega_2 \in Lie(SO(3))$

$$(t, x) \mapsto (t, \exp(t\omega_1)\exp(t\omega_2)x) = (t, \exp(t\omega)x)$$

$$t \rightarrow 0 : \omega = \omega_1 + \omega_2$$

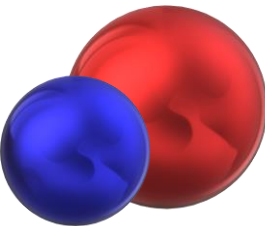
$$\exp(t\omega_1)\exp(t\omega_2) \neq \exp(t(\omega_1 + \omega_2))$$

Ellentmondás!



Gömbfelszín téridő-modellje

- $\mathbb{R}^3 \cong \text{Lie}(SO(3)) : \vec{\omega} \mapsto \vec{\omega} \times \cdot$
- $(R, \vec{\omega}) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ hatása a téridő $(t, x) \in \mathbb{R} \times S_2$ pontján
- $(t, x) \mapsto (t, \exp(t\vec{\omega} \times \cdot)Rx)$
- $\exp(t\vec{\omega}_1 \times \cdot)\exp(t\vec{\omega}_2 \times \cdot) = \exp(t(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \cdot) + \mathcal{O}^{(2)}(t)$
- $R\exp(t\vec{\omega} \times \cdot) = \exp(t(R\vec{\omega}) \times \cdot)R$
- $(R_1, \omega_1), (R_2, \omega_2) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ hatása
- $(t, x) \mapsto (t, \exp(t\vec{\omega}_1 \times \cdot)R_1\exp(t\vec{\omega}_2 \times \cdot)R_2x) =$
- $= (t, \exp(t(\vec{\omega}_1 + R_1\vec{\omega}_2) \times \cdot)R_1R_2(1 + \mathcal{O}^{(2)}(t))x)$
- „Infinitezimális” forgatásokra:
$$(R_1, \vec{\omega}_1) \cdot (R_2, \vec{\omega}_2) = (R_1R_2, (\vec{\omega}_1 + R\vec{\omega}_2))$$



Projektív ábrázolások

- Projektív ábrázolásokat visszavezetjük unitér ábrázolásokra
- **Wigner-tétel:** $A : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{P}(\mathcal{H}))$ projektív ábrázolás, $\dim(\mathcal{H}) \neq 2$, ekkor $\forall g \in G$ esetén lényegében egyértelműen létezik U_g unitér vagy antiunitér operátor:

$$A_g(P) = U_g P U_g^{-1}$$

G csoport egy
unitér kociklusa

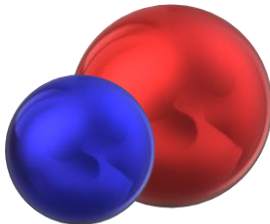
- $\forall g, h \in G$:

$$U_g U_h = \omega(g, h) U_{gh}$$

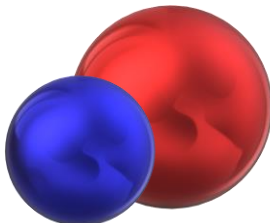
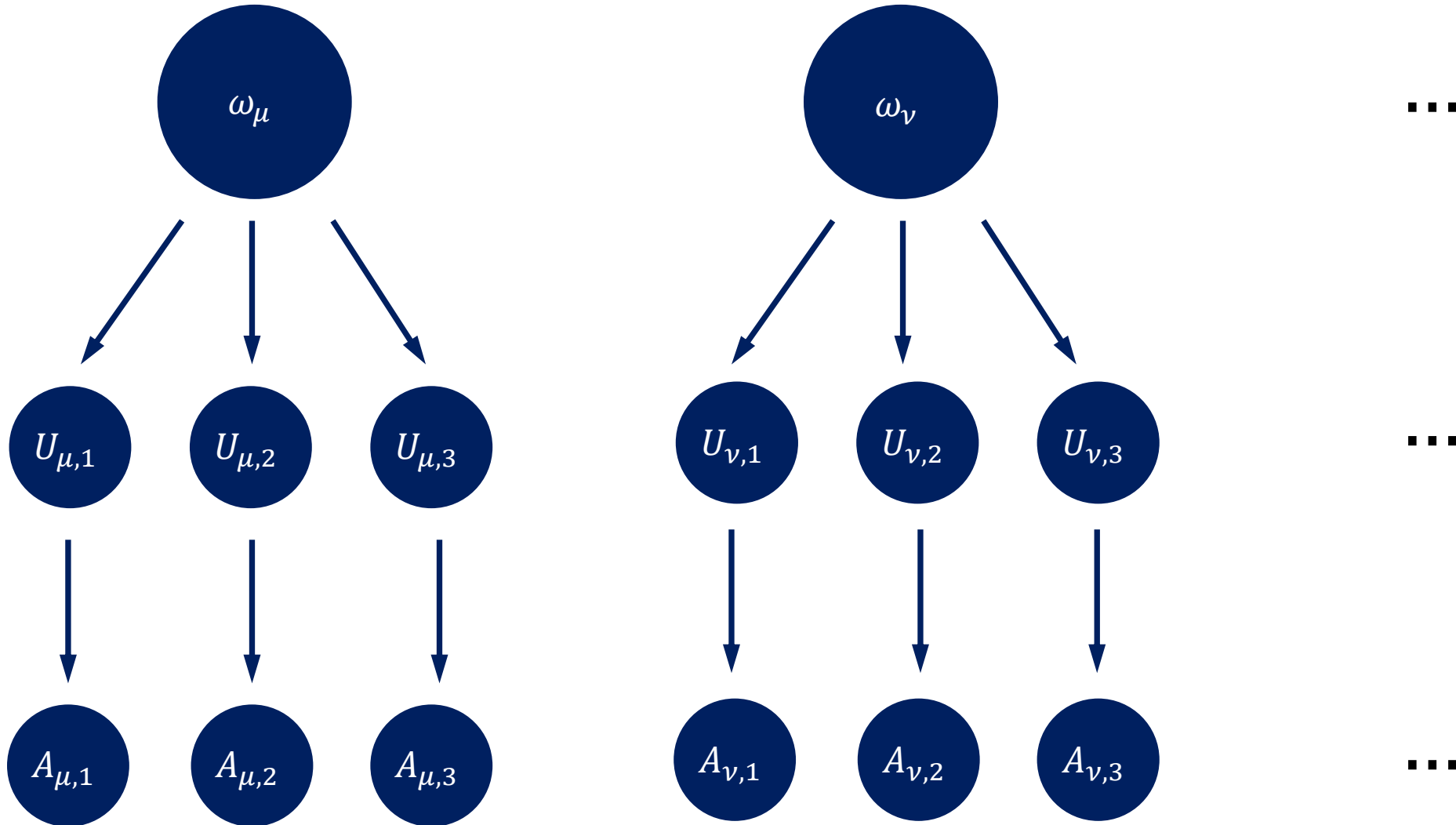
$$\omega(g, h) \in \mathbb{T} .$$

$$\omega(e, e) = 1$$

$$\omega(h, f) \omega(g, hf) = \omega(g, h) \omega(gh, f) \quad \forall g, h, f \in G$$



Projektív és unitér ábrázolások



$(SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ csoport ábrázolásai

- **Tétel:** Az $(SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ csoport minden kommutátor-kociklusa az azonosan 0 függvénnel kohomológ.
- **Irreducibilis unitér ábrázolások:**
- $(SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ folytonos irreducibilis unitér ábrázolásait megfeleltethetjük olyan (m, U) pároknak, melyekre $m \in \mathbb{R}$, és U az $SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3$ csoport egy folytonos irreducibilis unitér ábrázolása.
- Ábrázoló operátorok:

$$\begin{aligned} \hat{U} &: (SO(3) \times_{\tilde{q}} \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R} \times W \rightarrow W \\ (A, \tau, \psi) &\mapsto \hat{U}_{(A, \tau)} \psi := e^{im\tau} U_A \psi \end{aligned}$$

