Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar

Gödel univerzum geodetikusainak elemzése

TDK beszámoló

Bárány Balázs
IV. éves matematikus hallgató

Konzulens: Dr. Andai Attila

2006 november 17.

Előadás vázlat

1. Differenciálgeometriai alapok
2. Időutazás időszerű, normált görbén
3. Gödel univerzum geodetikusai
4. Az egyenletrendszer egy megoldása
5. Példa geodetikuson történő időutazásra
6. Megmaradó mennyiségek az univerzumban

Differenciálgeometriai alapok

1 Definíció. Gödel téridőnek *nevezzük az* $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ *sokaságot, ahol az első komponens az időnek, a többi pedig az* $\mathbb{R}^3$ *hengerkoordinátás felírásának felel meg. A sokaság minden* $(t, r, \varphi, z) \in M$ *pontjában tekintsük a következő mátrixot.*

$$G(t, r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -8\sqrt{2}\,\mathrm{sh}^2\mathrm{r} & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{2}\,\mathrm{sh}^2\mathrm{r} & 0 & 8\,\mathrm{sh}^2\mathrm{r} - 8\,\mathrm{sh}^4\mathrm{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

A $G : M \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ *leképezést, illetve az általa meghatározott*

$$M \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \qquad p \mapsto \big((a, b) \mapsto \langle a, G(p)b\rangle\big)$$

függvényt nevezzük Gödel-metrikának. *Az* $\langle a, G(p)b\rangle$ *mennyiség az* a *és* b *vektor* p *pontbeli* skaláris szorzata.

Egy részecske vagy test téridőben történő mozgását egy görbével írhatjuk le. Először megfogalmazzuk matematikailag azt a kijelentést, hogy a ,,részecske minden pillanatban a fénysebességnél lasabban halad és az időben előrefelé mozog".

2 Definíció. *Egy* $\underline{v} : \mathbb{R} \to M$ *görbét* időszerűnek *nevezzük, ha minden* $u \in \mathrm{Dom}\,\underline{v}$ *pontban*

$$\langle \dot{\underline{v}}(u), G(\underline{v}(u))\dot{\underline{v}}(u)\rangle < 0$$

teljesül. Hasonlóan, fényszerűnek *nevezzük, ha* $\langle \dot{\underline{v}}(u), G(\underline{v}(u))\dot{\underline{v}}(u)\rangle = 0$, *illetve* térszerűnek, *ha* $\langle \dot{\underline{v}}(u), G(\underline{v}(u))\dot{\underline{v}}(u)\rangle > 0$ *teljesül minden* $u \in \mathrm{Dom}\,\underline{v}$ *pontban.*

3 Definíció. *Az M sokaság egy p pontjában* időszerű vektoroknak *nevezzük az*

$$I_p = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \underline{v}, G(p)\underline{v} \rangle < 0\}$$

halmaz elemeit.

Minden $p \in M$ esetén az I_p halmazon értelmezzük a $\sim$ relációt, úgy, hogy az $\underline{v}, \underline{u} \in I_p$ vektorokra $\underline{v} \sim \underline{u}$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle \underline{u}, G(p)\underline{v} \rangle < 0$. Ismert, hogy a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció, melynek pontosan két ekvivalencia osztálya van.

4 Definíció. *Az M sokaság egy p pontjában az I_p halmazon a $\sim$ reláció által meghatározott két ekvivalencia osztályt nevezzük a p* pontbeli időkúpnak.

5 Definíció. *Az M sokaság minden p pontjában jelölje C_p az I_p egyik időkúpját. A*

$$\bowtie : M \to \mathbb{R}^4 \qquad p \mapsto \underline{u_p}$$

leképezést sima időkúp mezőnek nevezzük, *ha a leképezés sima és minden $p \in M$ pontban $\underline{u_p} \in C_p$ teljesül. Az M* időorientációján *sima időkúp mezőt értünk.*

A továbbiakban, ha csak másként nem kötjük ki, a térben csak az xy síkban történő mozgást vizsgáljuk, vagyis a $z(u) = 0$ esetet tekintjük.

Időutazás lehetősége időszerű, normált görbén

Tekintsük a $\underline{\mathbf{v}}(u) = [t(u), r(u), \varphi(u), 0]$ görbét, ahol $r(u), \varphi(u)$ tetszőleges, folytonosan differenciálható függvények. Tegyük fel még, hogy a $\underline{\mathbf{v}}$ függvény a $[0, c]$ $(c \in \mathbb{R}^+)$ intervallumon értelmezett. Ezekhez keresünk olyan $t(u)$ folytonosan differenciálható függvényt, amelyre a

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(0) > 0 \tag{1}$$

illetve a

$$\begin{aligned} &\langle \underline{\dot{\mathbf{v}}}(u), G(\underline{\mathbf{v}}(u))\underline{\dot{\mathbf{v}}}(u)\rangle = \\ &= -8\left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2 - 16\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u)\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u)\sqrt{2}\mathrm{sh}(r(u))^2 + 8\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2 + \\ &\quad + 8\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2 \mathrm{sh}(r(u))^2 - 8\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2 \mathrm{sh}(r(u))^4 = -1 \end{aligned} \tag{2}$$

feltétel teljesül minden $u \in \,]0, c[$ esetén.

Ekkor az (2) egyenletet megoldva $\dfrac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u)$-ra, kapjuk a

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u) = \frac{-4\mathrm{sh}(r(u))^2\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u) - \sqrt{1 + 2\mathrm{sh}(2r(u))^2\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2 + 8\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2}}{2\sqrt{2}} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u) = \frac{-4\mathrm{sh}(r(u))^2\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u) + \sqrt{1 + 2\mathrm{sh}(2r(u))^2\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2 + 8\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2}}{2\sqrt{2}} \tag{4}$$

eredményeket. Az (1) feltétel teljesülését kell ellenőrizni.

1. A $\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0) = 0$ esetben triviálisan a (4) megoldást kell választanunk.

2. A $\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0) > 0$ esetén könnyen látható, hogy az (1) feltétel teljesüléséhez (3)-at nem választhatjunk, mivel az ekkor negatív. A (4) megoldásból elemi átalakításokkal kapjuk az

$$1 + 8\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(0)\right)^2 + 8\mathrm{sh}(r(0))^2(1 - \mathrm{sh}(r(0))^2)\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0)\right)^2 > 0$$

feltételt, amely $r(0) \leq \ln(1+\sqrt{2})$ esetén biztosan teljesül.

Az egyenlőtlenséget $r(0)$-ra megoldva kapjuk, hogy bármely $\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(0) \in \mathbb{R}$ esetén $r(0)$-át az

$$\left[0, \operatorname{arsh}\left(\sqrt{\frac{2\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0) + \sqrt{2}\sqrt{1 + 2\left(\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0)\right)^2 + 8\left(\dfrac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(0)\right)^2}}{4\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0)}}\right)\right)$$

intervallumból választva teljesül a kritérium.

3. A $\dfrac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0) < 0$ feltétellel (4) választása esetén nyilvánvalóan teljesül (1). A (3) megoldás választásakor pedig elemi átalakításokkal a

$$1 + 8\left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(0)\right)^2 + 8\mathrm{sh}(r(0))^2(1 - \mathrm{sh}(r(0))^2)\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0)\right)^2 < 0$$

kritériumot kapjuk, amely nem teljesül, ha $r(0) \leq \ln(1+\sqrt{2})$.

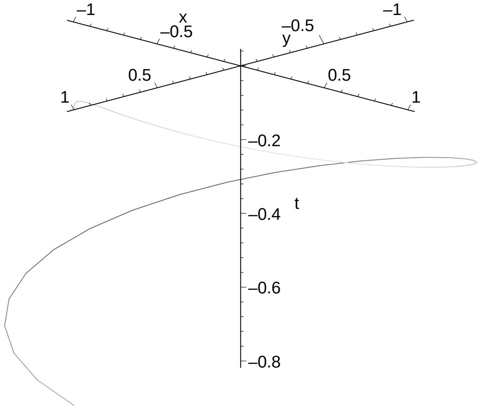
Tekintsünk a továbbiakban egy olyan görbét, melynek a sugár komponense $r \in \mathbb{R}^+$ állandó és a polárszög komponensét a $\varphi(u) = u^2$ függvény írja le, ahol $u \in \left[0, \sqrt{2\pi}\right[$. Ekkor a (4) megoldást u szerint kiintegrálva, $t(0) = 0$ feltétellel kapjuk a

$$t(u) = -u^2\sqrt{2}\operatorname{sh}(r)^2 + \frac{u\sqrt{16\operatorname{sh}(2r)^2u^2+2}}{8} + \\ + \frac{\ln(4\operatorname{sh}(2r)u + \sqrt{16\operatorname{sh}(2r)^2u^2+2})}{16\operatorname{sh}(2r)} + \frac{-\ln(2)}{32\operatorname{sh}(2r)} \tag{5}$$

függvényt. Vizsgáljuk meg, hogy r milyen megválasztása esetén lesz $t(0) > t(\sqrt{2\pi})$.

Hosszadalmas, de elemi átalalkítások után kapjuk, hogy r-t 2.18745-nél nagyobbnak választjuk, teljesül, hogy $t(\sqrt{2\pi}) < 0$. Ennél több is igaz, ugyanis *Maple* program segítségével megállapítható, hogy $t(\sqrt{2\pi}) < 0$ feltétel 0.9 és 2.18745 között is teljesül.

A vizsgált görbe a tér-idő pályája $r = 1$ esetén a következőképpen alakul.



1. Kép: *Időutazás normált, időszerű körön*

A Gödel univerzum geodetikusai

Tekintsük a $\underline{\mathbf{v}}:\mathbb{R}\to M$ görbét, ahol $\underline{\mathbf{v}}(u)=[t(u),r(u),\varphi(u),z(u)]$. A Gödel-univerzumban a $\underline{\mathbf{v}}$ görbe pontosan akkor geodetikus, ha eleget tesz a következő másodrendű, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszernek.

$$\frac{\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}u^2}(u)\right)\mathrm{sh}(r(u))\mathrm{ch}(r(u))-2\sqrt{2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}(u)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}(u)+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}(u)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}(u)}{\mathrm{ch}(r(u))\mathrm{sh}(r(u))}=0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}u^2}(u)+2\sqrt{2}\mathrm{sh}(r(u))\mathrm{ch}(r(u))\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}(u)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}(u)-\\&\quad-3\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}(u)\right)^2\mathrm{sh}(r(u))\mathrm{ch}(r(u))+2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}(u)\right)^2\mathrm{sh}(r(u))\,\mathrm{ch}(r(u))^3=0\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}u^2}(u)\mathrm{ch}(r(u))+4\mathrm{sh}(r(u))\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}(u)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}(u)+\\&\quad+2\sqrt{2}\mathrm{sh}(r(u))\mathrm{ch}(r(u))^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}(u)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}(u)-\\&\quad+2\sqrt{2}\mathrm{sh}(r(u))\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}(u)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}(u)=0\end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}u^2}(u)=0 \tag{9}$$

Látható, hogy a z koordináta $z(u)=a\,u+b$ alakú, ahol $a,b\in\mathbb{R}$, azonban a többi egyenlet megoldása messze nem triviális.

1 Tétel. *Legyenek t, φ és r kétszer folytonosan differenciálható függvények megoldásai a (6), (7), (8) differenciálegyenleteknek a $t(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $r(0) = r_0$, $\frac{dt}{du}(0) = t_0$, $\frac{d\varphi}{du}(0) = \varphi_0$, $\frac{dr}{du}(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett, ahol $r_0, t_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor r páros, t és φ páratlan függvény.*

Bizonyítás, vázlat. Könnyen látható, hogy minden $g \in C^2$ függvényre $\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}(-u)}(-u) = -\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,u}(-u)$ és $\frac{\mathrm{d}^2\,g}{\mathrm{d}(-u)^2}(-u) = \frac{\mathrm{d}^2\,g}{\mathrm{d}\,u^2}(-u)$, ezért a $t(-u), r(-u), \varphi(-u)$ függvények kielégítik az egyenletrendszert, ha $t(u), r(u), \varphi(u)$ megoldásai voltak annak. Valamint az egyenletrendszerbe behelyettesítve $-t(u), r(u), -\varphi(u)$ függvényeket, megkapjuk, hogy azok szintén megoldják azt. A kezdeti feltételek összevetésével kapjuk a tétel állítását, ugyanis $-t(0) = 0 = t(-0) = t(0)$, $-\varphi(0) = 0 = \varphi(-0) = \varphi(0)$, $r(-0) = r(0) = r_0$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(-0) = \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(0) = t_0$, $\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(-0) = \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0) = \varphi_0$, $\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(-0) = \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(0) = 0 = -\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(0)$, így az unicitás miatt $t(-u) = -t(u), \varphi(-u) = -\varphi(u), r(-u) = r(u)$. □

Érdekes kérdés, hogy mit tudunk mondani akkor, ha $\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(0) \neq 0$. Fontos látni, ha $t(u), r(u), \varphi(u)$ megoldásai a differenciálegyenlet-rendszernek, akkor $t(u + c) + d_1$, $r(u + c), \varphi(u + c) + d_2$ is megoldásai, ahol $c, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(c) = 0$, akkor az $t(u+c)-t(c), r(u+c), \varphi(u+c)-\varphi(c)$ függvények szintén páros, illetve páratlan függvények lesznek, valamint megoldásai a (6), (7), (8) differenciálegyenlet-rendszernek. A $t(0) = t_1$, $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_1$, $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(0) = 0$, $\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u} = r_1 > 0$ és $\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0) = 0$ kezdeti feltételek mellett nincs olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre $\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(c) = 0$.

A geodetikusok differenciálegyenletének egy megoldása

Tekintsük a továbbiakban egy olyan görbét, melynek a sugár komponense $r \in \mathbb{R}^+$ állandó. Ekkor a geodetikusra vonatkozó differenciálegyenletek a következőkre redukálódnak.

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\varphi}{\mathrm{d}\,u^2}(u) = 0 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &2\sqrt{2}\mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u)\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u) - 3\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2 \mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r) + \\ &\quad +2\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)^2 \mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)^3 = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,t}{\mathrm{d}\,u^2}(u) = 0 \tag{12}$$

A (10) és (12) egyenletekből következik, hogy $t(u) = t_1\,u + t_0$ és $\varphi(u) = \varphi_1\,u + \varphi_0$. Így (11) előáll

$$2\,\sqrt{2}\,t_1\,\varphi_1 - \varphi_1^2 + 2\,\varphi_1^2\,\mathrm{sh}(r)^2 = 0$$

alakban. Tegyük fel, hogy t_1, φ_1 adott és $\varphi_1 \neq 0$, ugyanis ellenkező esetben az egyenlet triviálisan teljesül. Pontosan akkor létezik valós r, $t_1 > 0$ esetén, ha $\varphi_1 > 2\sqrt{2}t_1$ vagy $\varphi_1 < 0$, illetve $t_1 < 0$ esetén $\varphi_1 < 2\sqrt{2}t_1$ vagy $\varphi_1 > 0$. Ekkor

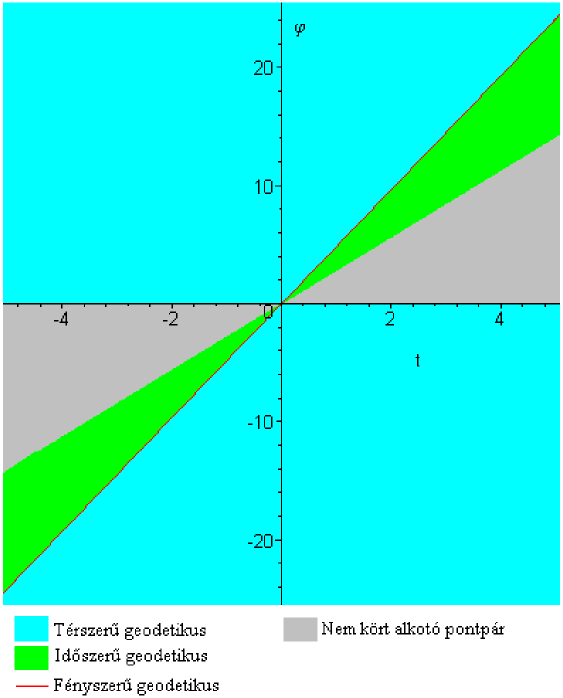
$$r = \mathrm{arsh}\left(\sqrt{\frac{\varphi_1 - 2\,\sqrt{2}\,t_1}{2\,\varphi_1}}\right).$$

A fentieket a skaláris szorzatba helyettesítve kapjuk a

$$8\,t_1^2 - 8\,\sqrt{2}\,t_1\,\varphi_1 + 2\,\varphi_1^2$$

kifejezést.

A következő ábrán a (t_1, φ_1) pontpárokhoz tartozó geodetikusok, osztályozása látható.



2. Kép: *A geodetikus görbe osztályozása* (t_1, φ_1) *pontpár függvényében*

Példa geodetikuson történő időutazásra

A geodetikuson történő mozgás a Gödel-téridőben az egyenes vonalú, egyenletes mozgásnak felel meg fizikailag. A következő geodetikus görbe kezdeti feltételei legyenek: $t(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $r(0) = 1.5$, $\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(0) = -0.2$, $\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(0) = 0$, valamint a 2. fejezetben, a normált görbékkel kapcsolatban elmondottak alapján a $\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(0)$ értéket válasszuk meg 0.220015-nek. Ekkor a skaláris szorzat értéke hozzávetőlegesen -1.000007719. Ismeretes, hogy geodetikuson a skaláris szorzat állandó, azaz a geodetikus időszerű, és jó közelítéssel normáltnak mondható. A Maple programcsomag *dsolve* programjának *bvp* módszerével beállítható, numerikus megoldás esetén, az abszolút hiba, melyet válasszunk 10^{-11}-nek a $[0, 3]$ intervallumon. Ekkor a geodetikus görbe az $u_0 = 2.8059105774$ helyen a következő értékeket veszi fel.

$$t(u_0) = -1.46203489895569794$$

$$r(u_0) = 1.50000000000003176$$

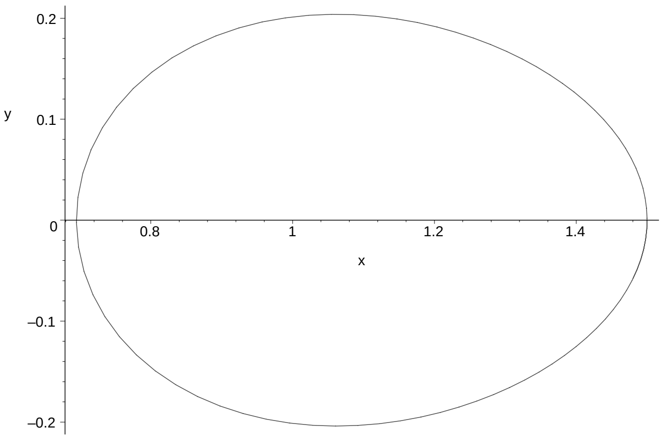
$$\varphi(u_0) = 0.982678359395364366 \cdot 10^{-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u_0) = 0.220015000000080868$$

$$\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(u_0) = 0.486471986368156246 \cdot 10^{-10}$$

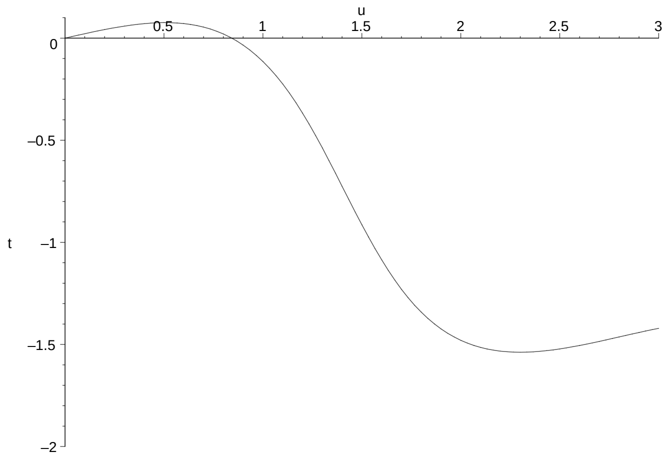
$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u_0) = -0.199999999999965122$$

Így a görbét jó közelítéssel térkoordinátáiban zártnak tekinthetjük, amelynek pályáját az alábbi ábra szemlélteti.



3. Kép: *A geodetikus görbe térkoordinátái*

A hozzá tartozó időfüggvényt pedig az alábbi ábra mutatja.



4. Kép: *A geodetikus görbe időkoordinátája*

Geodetikusok származtatása megmaradó mennyiségekből

2 Tétel. *Legyen* $H(g_1, g_2, t, r, \varphi)$ *a következő mátrix*

$$\begin{pmatrix} g_2 + \dfrac{g_1 \mathrm{ch}(r)^2}{2} & 0 & \dfrac{(g_1 + 8g_2 + g_1 \mathrm{ch}(2r))\mathrm{sh}(r)^2}{4\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2}\cos(\varphi)\mathrm{sh}(2r) & \sin(\varphi) & -\dfrac{\cos(\varphi)(\mathrm{ch}(2r)-2)\mathrm{sh}(2r)}{2} \\ \sqrt{2}\sin(\varphi)\mathrm{sh}(2r) & \cos(\varphi) & \dfrac{\sin(\varphi)(\mathrm{ch}(2r)-2)\mathrm{sh}(2r)}{2} \end{pmatrix}.$$

Ekkor minden g_2, g_1 *valós számhoz és minden* $t(u), r(u), \varphi(u)$ *megoldásához a (6), (7), (8) differenciálegyenlet-rendszernek léteznek olyan* c_1, c_2 *valós számok és* $f(g_1, g_2)$ *valós konstans, amelyre teljesül a*

$$H(g_1, g_2, t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{dt}{du}(u) \\ \dfrac{dr}{du}(u) \\ \dfrac{d\varphi}{du}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(g_1, g_2) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

összefüggés. A továbbiakban $H(g_1, g_2, t(u), r(u), \varphi(u))$ *mátrixot* impulzusmátrixnak *nevezzük.*

Bizonyítás, vázlat. A bizonyítás alapötlete a következő, jelöljük a $\left(\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u), \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(u), \frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u)\right)$ vektort a továbbiakban a $\underline{\dot{\mathbf{v}}}(u)$ szimbólummal. Tekintsük a (6), (7), (8) differenciálegyenletrendszer bal oldalát, mint egy vektort, az $\underline{X} = [(8), (7), (6)]$ sorrendben. Ezt szorozzuk be egy $D(t(u), r(u), \varphi(u))$ 3×3-as invertálható mátrixszal, melynek elemei akárhányszor differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy az így kapott vektor előáll

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\Big(D(t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \underline{\dot{\mathbf{v}}}(u)\Big)$$

alakban, vagyis

$$D(t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \underline{X} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,u}\Big(D(t(u), r(u), \varphi(u)) \cdot \underline{\dot{\mathbf{v}}}(u)\Big) \tag{13}$$

teljesül.

A fenti (13) egyenletből a megfelelő együtthatók egyenlővé tételével kapjuk a következő parciális differenciálegyenlet-rendszert a D mátrix $(\underline{d_i})_{i=1,2,3}$ oszlopvektoraira:

$$\frac{\partial \underline{d_1}}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \underline{d_1}}{\partial r} = -\frac{\partial \underline{d_2}}{\partial t} - \frac{2\sqrt{2}}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)}\underline{d_3} + 4\underline{d_1}\mathrm{th}(r) \tag{15}$$

$$\frac{\partial \underline{d_1}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \underline{d_3}}{\partial t} + \frac{2\mathrm{sh}(2r)}{\sqrt{2}}\underline{d_2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \underline{d_2}}{\partial r} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \underline{d_2}}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \underline{d_3}}{\partial r} + \frac{2}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)}\underline{d_3} + 2\sqrt{2}\mathrm{ch}(r)\mathrm{sh}(r)\underline{d_1} - 2\sqrt{2}\underline{d_1}\mathrm{th}(r) \tag{18}$$

$$\frac{\partial \underline{d_3}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\underline{d_2}(\mathrm{ch}(2r) - 2)\mathrm{sh}(2r) \tag{19}$$

A fenti egyenletrendszert megoldva, melynek részletei a dolgozatban olvashatóak, kapjuka D mátrix $(\underline{d_i})_{i=1,2,3}$ oszlopvektoraira:

$$\underline{d_1} = \sqrt{2}(\underline{k_1}\sin(\varphi) - \underline{k_2}\cos(\varphi))\mathrm{sh}(2r) + \underline{1}(g_2 + \frac{1}{2}g_1\mathrm{ch}(r)^2) \tag{20}$$

$$\underline{d_2} = \underline{k_1}\cos(\varphi) + \underline{k_2}\sin(\varphi) \tag{21}$$

$$\underline{d_3} = \frac{1}{2}(\underline{k_1}\sin(\varphi) - \underline{k_2}\cos(\varphi))(\mathrm{ch}(2r) - 2)\mathrm{sh}(2r) + \tag{22}$$

$$+\underline{1}\frac{(g_1 + 8g_2 + g_1\mathrm{ch}(2r))\mathrm{sh}(r)^2}{4\sqrt{2}},$$

Itt $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, valamint $\underline{k_1}, \underline{k_2} \in \mathbb{R}^3$ és $\underline{k_1}, \underline{k_2}, \underline{1}$, ahol $\underline{1}$ az a vektor, melynek minden eleme 1, lineárisan függetlenek, mivel D invertálható. Így D mátrixot a $[\underline{1}, \underline{k_2}, \underline{k_1}]$ mátrixszal beszorozva kapjuk az állítást. □

A fenti összefüggésben elegendő a g_1, g_2 konstansokat két lineárisan független vektor elemeiként megválasztani, hiszen azokból már bármely más konstansok is előállíthatók; mivel könnyen ellenőrizhető, hogy

$$f(g_1, g_2) + f(h_1, h_2) = f(g_1 + h_1, g_2 + h_2)$$

teljesül minden $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ paraméterre. Így speciálisan tekintsük a $H(0, 1, t, r, \varphi)$ és $H\left(1, -\frac{1}{4}, t, r, \varphi\right)$ mátrixokat.

A tételben előforduló egyenlet kifejtve a következőképpen alakul.

$$\frac{\mathrm{d}\,t(u)}{\mathrm{d}\,u} + \sqrt{2}\mathrm{sh}(r(u))^2 \frac{\mathrm{d}\,\varphi(u)}{\mathrm{d}\,u} = f(0,1) \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{ch}(2r(u))}{4}\frac{\mathrm{d}\,t(u)}{\mathrm{d}\,u} + \frac{\mathrm{sh}(r(u))^4}{2\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}\,\varphi(u)}{\mathrm{d}\,u} = f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &-\sqrt{2}\cos(\varphi(u))\mathrm{sh}(2r(u))\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u) + \sin(\varphi(u))\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(u) - \\ &\quad -\frac{\cos(\varphi(u))(\mathrm{ch}(2r(u))-2)\mathrm{sh}(2r(u))}{2}\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u) = c_1 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}\sin(\varphi(u))\mathrm{sh}(2r(u))\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,u}(u) + \cos(\varphi(u))\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,u}(u) + \\ &\quad +\frac{\sin(\varphi(u))(\mathrm{ch}(2r(u))-2)\mathrm{sh}(2r(u))}{2}\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,u}(u) = c_2 \end{aligned} \tag{26}$$

A *Maple* programcsomag *dsolve* programjának *dverk78* módszerével beállítható az abszolút és relatív hiba. Tekintsük az abszolút és a relatív hibát most 10^{-8} nagyságúnak. A következő táblázatban a fenti egyenletek numerikus megoldásának maximális eltérését adjuk meg a $[0, 2]$ intervallumon a kezdeti értékekben felvettektől.

r(0)	r'(0)	t'(0)	j'(0)	(23) hiba	(24) hiba	(25) hiba	(26) hiba
1.33	0.78	0.81	0.56	$0.5\ 10^{-8}$	$0.5\ 10^{-8}$	$0.4\ 10^{-7}$	$0.54\ 10^{-8}$
1.14	-0.21	0.26	-1.37	$0.7\ 10^{-8}$	$0.6\ 10^{-8}$	$0.25\ 10^{-7}$	$0.42\ 10^{-8}$
0.5	-0.97	0.67	0.14	$0.25\ 10^{-8}$	$0.129\ 10^{-8}$	$0.726\ 10^{-8}$	$0.3\ 10^{-7}$
0.68	-1.05	0.97	-0.34	$0.2\ 10^{-8}$	$0.13\ 10^{-8}$	$0.64\ 10^{-7}$	$0.4\ 10^{-7}$
0.1	1.43	1.29	-0.37	$0.4\ 10^{-8}$	$0.19\ 10^{-8}$	$0.38\ 10^{-8}$	$0.8\ 10^{-8}$
0.84	-0.56	1.36	1.11	$0.2\ 10^{-8}$	$0.2\ 10^{-8}$	$0.8\ 10^{-8}$	$0.28\ 10^{-8}$
0.62	0.96	0.3	-0.69	$0.7\ 10^{-9}$	$0.417\ 10^{-9}$	$0.2613\ 10^{-6}$	$0.6\ 10^{-7}$
1.26	0.13	0.75	0.37	$0.3\ 10^{-8}$	$0.3\ 10^{-8}$	$0.2\ 10^{-7}$	$0.2\ 10^{-8}$
0.29	0.32	1.26	0.67	$0.1\ 10^{-8}$	$0.1\ 10^{-8}$	$0.15\ 10^{-8}$	$0.6\ 10^{-9}$
0.11	-0.52	1.23	-0.03	$0.1\ 10^{-8}$	$0.1\ 10^{-8}$	$0.1\ 10^{-8}$	$0.11\ 10^{-8}$
1.28	-0.31	0.67	-0.58	$0.4\ 10^{-8}$	$0.26\ 10^{-8}$	$0.16\ 10^{-7}$	$0.6\ 10^{-8}$
0.14	-0.82	1.4	-0.52	$0.1\ 10^{-8}$	$0.2\ 10^{-8}$	$0.17\ 10^{-8}$	$0.19\ 10^{-8}$
0.35	0.92	0.02	0.43	$0.42\ 10^{-9}$	$0.2177\ 10^{-9}$	$0.532\ 10^{-7}$	$0.1\ 10^{-7}$
1.24	0.79	0.69	1.25	$0.8\ 10^{-8}$	$0.8\ 10^{-8}$	$0.5\ 10^{-7}$	$0.8\ 10^{-8}$
0.15	-1.17	1.49	0.14	$0.1\ 10^{-8}$	$0.1\ 10^{-8}$	$0.15\ 10^{-8}$	$0.3\ 10^{-8}$
0.3	0.45	0.35	0.97	$0.9\ 10^{-9}$	$0.6\ 10^{-9}$	$0.105\ 10^{-8}$	$0.28\ 10^{-8}$
0.41	0.69	1.49	-0.08	$0.1\ 10^{-8}$	$0.1\ 10^{-8}$	$0.4\ 10^{-8}$	$0.19\ 10^{-8}$
0.7	-0.2	1.41	1.48	$0.1\ 10^{-8}$	$0.2\ 10^{-8}$	$0.6\ 10^{-9}$	$0.4\ 10^{-9}$
0.2	0.17	1.14	-1.06	$0.1\ 10^{-8}$	$0.1\ 10^{-8}$	$0.12\ 10^{-8}$	$0.4\ 10^{-9}$
0.36	-0.84	1.31	-1.08	$0.2\ 10^{-8}$	$0.1\ 10^{-8}$	$0.3\ 10^{-8}$	$0.18\ 10^{-8}$

1. Táblázat: *A megmaradó mennyiségek numerikus hibája*

Címoldal
◀ ▶
Vissza
Teljes képernyő
Kilép

Néhány egyszerű következmény

A fenti (23), (24) egyenleteket $\frac{\mathrm{d}\, t(u)}{\mathrm{d}\, u}, \frac{\mathrm{d}\, \varphi(u)}{\mathrm{d}\, u}$ függvényekre megoldva, mint lineáris egyenletrendszert kapjuk, hogy ezen függvények csak $r(u)$-tól illetve a kezdeti feltételekől függenek és a következőképpen alakulnak

$$\frac{\mathrm{d}\, t(u)}{\mathrm{d}\, u} = \frac{4f\left(1, -\frac{1}{4}\right)}{\mathrm{ch}(r(u))^2} - f(0,1)\mathrm{th}(r(u))^2 \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{d}\, \varphi(u)}{\mathrm{d}\, u} = 2\sqrt{2}\, \frac{f(0,1)\mathrm{ch}(2r(u)) - 4f\left(1, -\frac{1}{4}\right)}{\mathrm{sh}(2r(u))^2}\ . \tag{28}$$

Így $\frac{\mathrm{d}\, t(u)}{\mathrm{d}\, u} \leq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $4f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \leq f(0,1)\mathrm{sh}(r(u))^2$. Ennek egy egyszerű következménye, hogy $\frac{\mathrm{d}\, t(u)}{\mathrm{d}\, u} \leq 0$ minden u-ra, ha $f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \leq 0$ és $f(0,1) \geq 0$, illetve $\frac{\mathrm{d}\, t(u)}{\mathrm{d}\, u} \geq 0$ minden u-ra, ha
$f\left(1, -\frac{1}{4}\right) \geq 0$ és $f(0,1) \leq 0$.

Másik érdekes megállapítás, hogy $\frac{\mathrm{d}\, r(u)}{\mathrm{d}\, u}$ függvény korlátos minden kezdeti érték megválasztása esetén. A $H(g_1, g_2, t(u), r(u), \varphi(u))$ mátrix inverzét tekintve egyszerűen kiszámolható, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\, r(u)}{\mathrm{d}\, u} = c_1 \sin(\varphi(u)) + c_2 \cos(\varphi(u)) \tag{29}$$

Azaz $\frac{\mathrm{d}\, r(u)}{\mathrm{d}\, u}$ korlátos és $\left\| \frac{\mathrm{d}\, r(u)}{\mathrm{d}\, u} \right\| \leq \|c_1\| + \|c_2\|$ minden u-ra.

A $\varphi(u)$ és $r(u)$ függvények között is felírhatunk egy összefüggést, ugyanis (28) és (29) egyenletek miatt

$$\frac{\mathrm{d}\, r}{\mathrm{d}\, \varphi} = \frac{c_1 \sin(\varphi) + c_2 \cos(\varphi)}{2\sqrt{2} \cdot \dfrac{f(0,1)\mathrm{ch}(2r) - 4f\left(1, -\frac{1}{4}\right)}{\mathrm{sh}(2r)^2}} \ .$$

Azaz

$$c_2 \sin(\varphi(u)) - c_1 \cos(\varphi(u)) = \frac{\sqrt{2}\Big(4f\left(1, -\frac{1}{4}\right)\mathrm{ch}(2r(u)) - f(0,1)\Big)}{\mathrm{sh}(2r(u))} + m$$

minden u-ra a geodetikuson valamely m valós konstanssal.

Összefoglalás

1. Példát mutattam olyan normált, időszerű görbére, mely térkoordinátáiban zárt, illetve azon időutazás történik.
2. Felírtam a geodetikusok differenciálegyenlet-rendszerének egy megoldását.
3. Mutattam olyan geodetikust, mely zártnak mondható térkoordinátáiban, és időutazást hajt végre a rajta haladó részecske.
4. Felírtam a megmaradó mennyiségek explicit alakját a geodetikusokból származtatva.

Felhasznált irodalom

[1] Andréka H., Madarász J., Németi I.: *Visualizing some ideas about Gödel-type rotating universes*, preprint 2002.

[2] Chandrasekhar, S., Wright, J. P.: *The geodesics in Gödel's universe*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, 1961, 341–347.

[3] Hawking, S., Ellis, G. F. *Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1975.

[4] Hraskó Péter: *Bevezetés az általános relativitáselméletbe*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1997.

[5] Landau, L. D., Lifsic, I. M.: *Elméleti fizika II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[6] O'Neill, B.: *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[7] Szenthe J.: *Bevezetés a sima sokaságok elméletébe*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2002.

[8] Szenthe J.: *A Riemann geometria elemei*, mondAt Kft, Budapest, 1998.