Tételgyűjtemény a normált algebrák elemeiből

Andai Attila

Az itt szereplő tételekhez szükséges fogalmak és bizonyítások megtalálhatók a Kristóf János: Analízis IV. jegyzetben. Ez tanulási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák!

XVI. Normált algebrák

1. Algebrák

Legyen A algebra a K test felett.

(1) Létezik olyan B egységelemes algebra K felett és olyan $j : A \to B$ algebra-morfizmus, hogy minden C egységelemes algebrához és $\pi : A \to C$ algebra morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\bar{\pi} : B \to C$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $\bar{\pi} \circ j = \pi$ teljesül.

(2) Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan egységelemes algebrák melyekre 1. teljesül. Ekkor létezik egyetlen olyan $\pi : B_1 \to B_2$ algebra-izomorfizmus, hogy $\pi \circ j_1 = j_2$.

Az A algebra $\mathfrak{m}$ ideálja pontosan akkor reguláris, ha az $A/\mathfrak{m}$ faktoralgebra nem nulla és egységelemes.

Legyen A algebra. Ha $\chi \in X(A)$, akkor $\ker \chi$ 1 kodimenziós reguláris ideál. Minden $\mathfrak{m} \subseteq A$ 1 kodimenziós reguláris ideálhoz létezik egyetlen olyan $\chi \in X(A)$, hogy $\ker \chi = \mathfrak{m}$, így a

$$\chi \mapsto \ker \chi$$

leképezés bijekció az A nem nulla karaktereinek halmaza és az A 1 kodimenziós reguláris ideáljainak halmaza között.

Egységelemes algebra minden valódi ideálja része egy maximális ideálnak.

Ha A algebra K felett és $\mathfrak{m}$ reguláris maximális ideál A-ban, akkor létezik olyan $\tilde{\mathfrak{m}}$ maximális ideál $\tilde{A}$-ban, hogy

$$\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}} \cap A.$$

Ha A kommutatív algebra a K test felett és $\mathfrak{m}$ reguláris maximális ideál A-ban, akkor $A/\mathfrak{m}$ testbővítése K-nak.

(1) Ha A algebra K test felett, akkor $a, b \in A$ esetén $\mathrm{Sp}'(ab) = \mathrm{Sp}'(ba)$.

(2) Ha A egységelemes algebra K test felett, akkor $a, b \in A$ esetén $\{0\} \cup \mathrm{Sp}(ab) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}(ba)$.

Ha A és B egységelemes algebrák és $\pi : A \to B$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, akkor $a \in A$ esetén

$$\mathrm{Sp}_B\, \pi(a) \subseteq \mathrm{Sp}_A(a).$$

Ha A és B tetszőleges algebrák, és $\pi : A \to B$ algebra-morfizmus, akkor $a \in A$ esetén

$$\mathrm{Sp}'_B\, \pi(a) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(a).$$

Ha A egységelemes algebra, akkor minden $\chi \in X(A)$ karakterre és $a \in A$ elemre teljesül, hogy

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{G}(a) \subseteq \mathrm{Sp}(a).$$

Ha A algebra, akkor minden $\chi \in X'(A)$ karakterre és $a \in A$ elemre teljesül, hogy

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{G}(a) \subseteq \mathrm{Sp}'(a).$$

Legyen A egységelemes algebra a K test felett, és $a \in A$. Ekkor minden $P \in K[X]$ polinomra

$$P(\mathrm{Sp}(a)) \subseteq \mathrm{Sp}(P(a)),$$

és ha a K test algebrailag zárt, valamint P legalább elsőfokú, akkor

$$P(\mathrm{Sp}(a)) = \mathrm{Sp}(P(a)).$$

2. Normált algebrák

Ha A normált algebra, és $a \in A$, akkor az $(\sqrt[n]{||a^n||})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és

$$\rho(a) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{||a^n||}.$$

Legyen A egységelemes normált algebra, és $a \in A$. A $\sum_{k \in \mathbb{N}} a^k$ sor pontosan akkor konvergens, ha az $1 - a$ elem invertálható és $\lim_{n \to \infty} a^n = 0$. Ha az $\sum_{k \in \mathbb{N}} a^k$ sor konvergens, akkor

$$(1 - a)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a^k.$$

Legyen A egységelemes Banach-algebra. Ha $a \in A$ olyan, hogy $\rho(a) < 1$, akkor az $1 - a$ elem invertálható, és

$$(1-a)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a^k.$$

Legyen A egységelemes Banach-algebra K felett, és $G(A)$ az A invertálható elemeinek halmaza. Minden $a \in G(A)$ elemre

$$B_{\frac{1}{||a^{-1}||}}(a) \subseteq G(A),$$

és a

$$i : G(A) \to A \qquad a \mapsto a^{-1}$$

leképezés K-analitikus, és minden $a \in A$ elemre, $n \in \mathbb{N}$ számra, és $(x_k)_{k \in n} \in A^n$ rendszerre:

$$\big((D^n i)(a)\big)\big((x_k)_{k \in n}\big) = (-1)^n \sum_{\sigma \in S_n} a^{-1} x_{\sigma(0)} a^{-1} \dots x_{\sigma(n-1)} a^{-1},$$

ahol S_n az n halmaz teljes permutációcsoportja.

Banach-algebrában minden reguláris maximális ideál zárt.

Legyen A egységelemes Banach-algebra K felett, és $a \in A$.

(1) $\mathrm{Sp}(a) \subseteq \bar{B}_{\rho(a)}(0, K)$, és $\mathrm{Sp}(a)$ kompakt halmaz K-ban, és az $a \in A$ elem rezolvens-függvénye végtelenben eltünő K-analitikus függvény.

(2) Ha $K = \mathbb{C}$, akkor

$$\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}_+ \quad | \quad \mathrm{Sp}(a) \subseteq \bar{B}_r(0, \mathbb{C})\},$$

és ha A nem nulla dimenziós, akkor $\mathrm{Sp}(a) \neq \emptyset$.

Ha A Banach-algebra K felett, és $a \in A$, akkor

(1) $\mathrm{Sp}'(a) \subseteq \bar{B}_{\rho(a)}(0, K)$, és $\mathrm{Sp}'(a)$ kompakt halmaz K-ban.

(2) Ha $K = \mathbb{C}$, akkor

$$\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}_+ \quad | \quad \mathrm{Sp}(a) \subseteq \bar{B}_r(0, \mathbb{C})\}.$$

Ha A egységelemes Banach-algebra K-felett, és $a \in A$ olyan invertálható elem, hogy

$$||a|| = ||a^{-1}|| = 1,$$

akkor $\mathrm{Sp}(a) \subseteq \mathbb{T}_K$.

Nem nulla dimenziós komplex normált algebrában minden elem spektruma nem üres halmaz.

Ha A olyan egységelemes komplex normált algebra, hogy A minden nem nulla eleme invertálható, akkor $A = \mathbb{C} \cdot 1$.

Kommutatív komplex Banach-algerbában minden reguláris maximális ideál 1-kodimenziós.

Legyen A egységlemes Banach-algerba, és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az A invertálható elemeinek konvergens sorozata. A $\lim_{n\to\infty} a_n$ elem pontosan akkor invertálható, ha az $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos.

Legyen A egységelemes Banach-algerba, és $B \subseteq A$ olyan zárt részalgebra, hogy $1 \in B$. Ekkor minden $b \in B$ elemre

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_B(b)) \subseteq \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(b)).$$

Legyenek E, F, G normált terek és $u : E \times F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris operátor. Ha $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} e_k$$

sor abszolút konvergens E-ben, és $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat F-ben, hogy a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$$

sor abszolút konvergens F-ben, akkor a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n} u(e_j, f_{k-j})$$

sor abszolút konvergens G-ben, és ha E, F, G Banach-terek, akkor

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j=0}^{n} u(e_j, f_{k-j}) = u(\sum_{k=0}^{\infty} e_k, \sum_{k=0}^{\infty} f_k).$$

Legyen A egységelemes komplex Banach-algebra, és $a \in A$. Ekkor

$$\mathcal{E} \to A \quad f \mapsto f_A(a)$$

leképezés olyan egységelem-tartó algebra-morfizmus, amely az $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ függvényhez a-t rendeli. Továbbá, ha $P \in \mathbb{C}[X]$, akkor a $P_{\mathbb{C}} \in \mathcal{E}$ függvényre

$$P_{\mathbb{C}}(a) = P(a).$$

Ha A egységelemes komplex Banach-algebra, $a \in A$ és $f \in \mathcal{E}$, akkor

$$f(\mathrm{Sp}(a)) \subseteq \mathrm{Sp}(f_A(a)).$$

Legyen A egységelemes Banach-algebra. Létezik olyan $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_n$ sor abszolút konvergens, és minden $a \in A$, $||a|| \leq 1$ elemre

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k \in A$$

elem olyan, hogy

$$1 + a = b^2.$$

3. Banach-algerba Gelfand-reprezentációja

Ha A Banach-algebra, és $\chi \in X'(A)$, akkor minden $a \in A$ elemre

$$|\chi(a)| \leq \rho(a) \leq ||a||$$

teljesül, így A minden karaktere folytonos lineáris funkcionál A felett, amelynek normája kisebb-egyenlő 1-nél.

Ha A Banach-algebra, akkor $X'(A)$ kompakt és $X(A)$ lokálisan kompakt részhalmaza A'-nek a $\sigma(A', A)$ topológia szerint. Ha A egységlemes Banach-algebra, akkor $X(A)$ kompakt a $\sigma(A', A)$ topológia szerint.

Ha A Banach-algebra K felett, akkor minden $a \in A$ elemre $\mathcal{G}(a) \in \bar{C}_0(X(A), K)$ az $X(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint.

Legyen A kommutatív komplex Banach-algerba, és $a \in A$. Ekkor

$$\{0\} \cup \mathrm{Im}(\mathcal{G}(a)) = \mathrm{Sp}'(a), \quad \text{és} \quad ||\mathcal{G}(a)|| = \rho(a).$$

Ha A egységelemes, akkor $\mathrm{Im}(\mathcal{G}(a)) = \mathrm{Sp}(a)$.

Legyen A kommutatív komplex Banach-algebra. A

$$\mathcal{G} : A \to \bar{C}_0(X(A), \mathbb{C})$$

Gelfand-reprezentáció pontosan akkor izometria $\bar{C}_0(X(A), \mathbb{C})$ felett a sup-normát véve, ha minden $a \in A$ elemre $||a^2|| = ||a||^2$.

Legyen A kommutatív komplex Banach-algerbra, és tekintsük a következő halmazokat:

(1) $\mathfrak{n}_1 = \ker(\mathcal{G})$;
(2) $\mathfrak{n}_2 = \{a \in A \quad | \quad \rho(a) = 0\}$;
(3) $\mathfrak{n}_3 = \{a \in A \quad | \quad \mathrm{Sp}'(a) = \{0\}\}$;
(4) $\mathfrak{n}_4 = \bigcap_{\chi \in X'(A)} \ker(\chi)$;
(5) $\mathfrak{n}_5$ az A reguláris maximális ideáljainak a metszete, ha létezik A-nak reguláris maximális ideálja, egyébként $\mathfrak{n}_5 = A$.

Ezek a halmazok mind ideálok A-ban és, $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_5$.

Legyenek A és B Banach-algebrák, és tegyük fel, hogy B Gelfand-reprezentációja injektív. Ekkor minden $\pi : A \to B$ algebra-morfizmus folytonos.

Ha A komplex Banach-algebra, és B radikálmentes kommutatív komplex Banach-algebra, akkor minden $\pi : A \to B$ algebra-morfizmus folytonos.

Legyen T lokálisan kompakt tér és $A = \bar{C}_0(T, K)$. Minden $F \subseteq T$ zárt halmazra legyen

$$\mathfrak{m}_F = \{a \in A \quad | \quad F \subseteq \{t \in T | a(t) = 0\}\}.$$

(1) Az $F \mapsto \mathfrak{m}_F$ hozzárendelés bijekció a T zárt halmazainak halmaza és az A zárt ideáljainak halmaza között.
(2) Ha $F \subseteq T$ zárt halmaz, akkor az $\mathfrak{m}_F$ ideál pontosan akkor reguláris A-ban, ha F kompakt és nem üres.

(3) A $t \mapsto \mathfrak{m}_{\{t\}}$ hozzárendelés bijekció a T halmaz és az A reguláris maximális ideáljainak halmaza között. Az A minden reguláris ideálja 1-kodimenziós.
(4) Minden $t \in T$ pontra értelmezzük az

$$\varepsilon_t : A \to K \quad a \mapsto a(t)$$

leképezést. Ekkor $t \in T$ esetén $\varepsilon_t \in X(A)$, és az

$$\varepsilon_T : T \to X(A) \quad t \mapsto \varepsilon_t$$

leképezés a T-n adott eredeti topológia és az $X(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint.
(5) Az

$$\varepsilon_T^\sharp : \bar{C}_0(X(A), K) \to \bar{C}_0(T, K) \quad \phi \mapsto \phi \circ \varepsilon_T$$

leképezés olyan izometrikus algebra-izomorfizmus a $\bar{C}_0(X(A), K)$ és A függvényalgebrák között, hogy

$$\varepsilon_T^\sharp \circ \mathcal{G} = \mathrm{Id}_A .$$

Legyenek S és T lokálisan kompakt terek.
(1) Minden $\pi : \bar{C}_0(T, K) \to \bar{C}_0(S, K)$ algebra-izomorfizmushoz létezik olyan $\sigma : S \to T$ homeomorfizmus, hogy ha

$$\sigma^\sharp : \bar{C}_0(T, K) \to \bar{C}_0(S, K) \quad \phi \mapsto \phi \circ \sigma,$$

akkor $\sigma^\sharp = \pi$.
(2) A T és S lokálisan kompakt terek pontosan akkor homeomorfak, ha a $\bar{C}_0(T, K)$ és $\bar{C}_0(S, K)$ algebrák izomorfak.

Ha T és S kompakt terek, akkor egy $C(T, K) \to C(S, K)$ algebra-morfizmus pontosan akkor térszerű, ha egységelem tartó.

4. *-algebrák

Legyen A -algebra.
(1) Létezik olyan B egységelemes *-algebra K felett és olyan $j : A \to B$ *-algebra morfizmus, hogy minden C egységelemes *-algebrához és $\pi : A \to C$ *-algebra morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\bar{\pi} : B \to C$ egységelem-tartó *-algebra morfizmus, amelyre $\bar{\pi} \circ j = \pi$ teljesül.
(2) Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan egységelemes *-algebrák melyekre 1. teljesül. Ekkor létezik egyetlen olyan $\pi : B_1 \to B_2$ *-algebra izomorfizmus, hogy $\pi \circ j_1 = j_2$.

Egységelemes *-algebrában minden Abel-prolektor véges projektor. Minde Abel-típusú egységelemes *-algebra véges.

5. Normált *-algebrák

Ha az E normált térnek létezik véges kodimenziós teljes lineáris altere, akkor Banach-tér.

Legyen A normált *-algebra, és $\tilde{A}$ az A *-algebra standard egységelemesítése.

(1) Az $\tilde{A}$ *-algebra az

$$||\cdot||_1 : \tilde{A} \to \mathbb{R}_+ \quad (\lambda, a) \mapsto |\lambda| + ||a||$$

normával egységelemes normált *-algebra. Ha A Banach *-algebra, akkor az $\tilde{A}$ *-algebra ezzel a normával ellátva egységelemes Banach *-algebra.

(2) Ha A egységelemes pre-C^*-algebra, akkor az

$$||\cdot||_2 : \tilde{A} \to \mathbb{R}_+ \quad (\lambda, a) \mapsto \max(|\lambda|, ||a + \lambda 1||)$$

leképezés norma $\tilde{A}$ *-algebra felett, és $\tilde{A}$ ezzel a normával ellátva egységelemes pre-C^*algebra, és ha A C^*-algebra, akkor $\tilde{A}$ egységelemes C^*-algebra.

(3) Ha A nem egységelemes pre-C^*algebra, akkor az

$$||\cdot||_3 : \tilde{A} \to \mathbb{R}_+ \quad (\lambda, a) \mapsto \sup_{a' \in A, ||a'||=1} ||\lambda a' + aa'||$$

leképezés norma az $\tilde{A}$ *-algebra felett, és $\tilde{A}$ ezzel a normával ellátva egységelemes pre-C^*algebra, és ha A C^*-algebra, akkor $\tilde{A}$ egységelemes C^*-algebra.

Ha A pre-C^*algebra, akkor minden $a \in A_{\mathrm{sa}}$ elemre $\rho(x) = ||x||$.

Ha A Banach *-algebra és B pre-C^*algebra, akkor minden $\pi : A \to B$ algebra-morfizmusra és minden $a \in A$ elemre

$$||\pi(a)|| \leq ||a||.$$

Ha A és B C^*-algebrák, akkor minden $\pi : A \to B$ *-izomorfizmus izometria.

Egy A *-algebra felett legfeljebb egy C^*-norma létezik.

Legyen A *-algebra és $p : A \to \mathbb{R}_+$ félnorma. A következők ekvivalensek.

(1) p C^*-félnorma A felett.
(2) Létezik olyan B C^*-algebra és olyan $\pi : A \to B$ *-algebra morfizmus, hogy minden $a \in A$ elemre
$$p(a) = ||\pi(a)||$$
teljesül.

Ha A olyan *-algebra, hogy létezik A felett Banach *-norma, akkor egyértelműen létezik olyan A feletti $||\cdot||_{\mathrm{St}}$ C^*-félnorma, hogy minden A feletti p C^*-félnormára $p \leq ||\cdot||_{\mathrm{St}}$; ezt a C^*-félnormát minden A feletti Banach *-norma majorálja.

Legyen A Banach *-algebra.

(1) Létezik olyan B C^*-algebra és olyan $j : A \to B$ *-algebra morfizmus, hogy minden C C^*-algebrához és $\pi : A \to C$ *-algebra morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\bar{\pi} : B \to C$ *-algebra morfizmus, amelyre $\bar{\pi} \circ j = \pi$ teljesül.
(2) Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan C^*-algebrák melyekre 1. teljesül. Ekkor létezik egyetlen olyan $\pi : B_1 \to B_2$ *-algebra izomorfizmus, hogy $\pi \circ j_1 = j_2$.

6. Kommutatív C^*-algebrák és folytnos függvényszámítás

Legyen A C^*-algebra.

(1) Ha A egységelemes és $u \in U(A)$, akkor $\mathrm{Sp}(u) \subseteq \mathbb{T}$.
(2) Ha $x \in A_{\mathrm{sa}}$, akkor $\mathrm{Sp}'(x) \subseteq \mathbb{R}$, és ha A egységelemes, akkor $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{R}$.

Ha A C^*-algebra, akkor $\chi \in X'(A)$ esetén a χ lineáris funkcionál önadjungált.

Ha A egységelemes C^*-algebra, és $B \subseteq A$ olyan zárt *-részalgebra, hogy $1 \in B$, akkor minden $b \in B$ elemre $\mathrm{Sp}_A(b) = \mathrm{Sp}_B(b)$ teljesül.

Ha A kommutatív C^*-algebra, akkor a
$$\mathcal{G}_A : A \to \bar{C}_0(X(A), \mathbb{C})$$
Gelfand-reprezentáció *-izomorfizmus.

Ha A C^*-algebra és $a \in A$ normális elem, akkor $\rho(a) = ||a||$.

Ha A kommutatív Banach *-algebra, akkor a

$$(\bar{C}_0(X_{\mathrm{sa}}(A), \mathbb{C}), \mathcal{G}_{A,\mathrm{sa}})$$

pár fedő C^*-algebrája A-nak, tehát minden B C^*-algebrához és $\pi : A \to B$ *-algebra morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\bar{\pi} : \bar{C}_0(X_{\mathrm{sa}}(A), \mathbb{C}) \to B$ *-algebra morfizmus, hogy $\bar{\pi} \circ \mathcal{G}_{A,\mathrm{sa}} = \pi$.

Ha A C^*-algebra, B normált *-algebra, és $\pi : A \to B$ injektív *-algebra morfizmus, akkor minden $a \in A$ elemre

$$||\pi(a)|| \geq ||a||.$$

Legyen A egységelemes C^*-algebra, és $a \in A$ normális elem. Létezik olyan

$$C_a : C(\mathrm{Sp}_A(a), \mathbb{C}) \to A$$

egységelem tartó *-algebra morfizmus, amelyre $C_a(\mathrm{Id}_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = a$ teljesül. Ez a C_a leképezés izometria a C^*-normák szerint, és értékkészlete megegyezik az $\{a, 1\}$ halmaz által generált A-beli C^*-részalgebrával.

Legyen A egységelemes C^*-algebra, és $a \in A$ normális elem. Ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor

$$C_a(f|_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = f_A(a).$$

Legyen A egységelemes C^*-algebra, és $a \in A$ normális elem. Ha $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \mathrm{Dom}(\phi)$ és $\phi|_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in C(\mathrm{Sp}_A(a), \mathbb{C})$, akkor

$$\mathrm{Sp}_A(\phi_A(a)) = \phi(\mathrm{Sp}_A(a)).$$

Legyen A egységelemes C^*-algebra, és $a \in A$ normális elem. Ha $\phi, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan függvények, hogy $\mathrm{Sp}(a) \subseteq \mathrm{Dom}(\psi \circ \phi)$, $\phi|_{\mathrm{Sp}(a)} \in C(\mathrm{Sp}(a), \mathbb{C})$, és $\psi|_{\mathrm{Sp}(a)} \in C(\phi(\mathrm{Sp}(a)), \mathbb{C})$, akkor

$$(\psi \circ \phi)_A(a) = \psi_A(\phi_A(a)).$$

Legyenek A és B egységelemes C^*-algebrák, és $\pi : A \to B$ egységelem tartó $*$-algebra morfizmus. Ha $a \in A$ normális elem, és $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}(a) \subseteq \mathrm{Dom}(\phi)$ és $\phi|_{\mathrm{Sp}(a)} \in C(\mathrm{Sp}(a), \mathbb{C})$, akkor

$$\pi(\phi_A(a)) = \phi_B(\pi(a)).$$

Legyen A C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Jelölje $C'(\mathrm{Sp}'_A(a), \mathbb{C})$ azon $\phi : \mathrm{Sp}'(a) \to \mathbb{C}$ folytonos függvények halmazát, amelyekre $\phi(0) = 0$, ez C^*-részalgebrája a $C(\mathrm{Sp}'(a), \mathbb{C})$ C^*-algebrának. Létezik egyetlen olyan

$$C'_a : C'(\mathrm{Sp}'(a), \mathbb{C}) \to A$$

$*$-algebra morfizmus, hogy $C'_a(\mathrm{Id}_{\mathrm{Sp}'(a)}) = a$. A C'_a leképezés izometria és $\mathrm{Im}(C'_a)$ egyenlő az $a \in A$ elem által generált C^*-részalgebrával.

Legyen T teljesen reguláris Hausdorff-tér. Létezik olyan K kompakt tér és olyan $j : T \to K$ folytonos függvény, hogy:

(1) Minden S kompakt térhez, és minden $f : T \to S$ folytonos függvényhez létezik egyetlen olyan $\bar{f} : K \to S$ folytonos függvény, amelyre $\bar{f} \circ j = f$ teljesül.
(2) Az $\mathrm{Im}(j)$ sűrű K-ban.
(3) A j homeomorfizmus T és $\mathrm{Im}(j)$ topologikus terek között.

7. Pozitív elemek C^*-algebrában

Legyen A C^*-algebra, és $y \in A_{\mathrm{sa}}$ olyan, hogy $\mathrm{Sp}'(y) \subseteq \mathbb{R}_+$. Minden $\alpha > 0$ valós számhoz létezik egyetlen olyan $x \in A_{\mathrm{sa}}$, hogy $\mathrm{Sp}'(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ és $y = x^\alpha$.

Ha A C^*-algebra és $x \in A_{\mathrm{sa}}$, akkor léteznek olyan $u, v \in A_{\mathrm{sa}}$ elemek, hogy $uv = vu = 0$ és $x = u^2 - v^2$.

Ha A C^*-algebra, akkor

$$\{x \in A_{\mathrm{sa}} \quad | \quad \mathrm{Sp}'(x) \subseteq \mathbb{R}_+\} \subseteq A_+.$$

Ha A C^*-algebra, $x \in A_{\mathrm{sa}}$, és $\phi \in C(\mathrm{Sp}'(a), \mathbb{R}_+)$ olyan függvény, hogy $\phi(0) = 0$, akkor $\phi(x) \in A_+$.

(1) Egy C^*-algebra minden eleme előáll pozitív elemek komplex lineáris kombinációjaként.
(2) Egy C^*-algebra feletti önadjungált funkcionálok között a természetes előrendezés rendezés.

Egységelemes C^*-algebra minden eleme előáll unitér elemek valós lineáris kombinációjaként.

Legyen A egységelemes C^*-algebra és $x \in A_{\mathrm{sa}}$.

(1) $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ ekvivalens azzal, hogy $||(||x|| \cdot 1 - x)|| \leq ||x||$.
(2) Ha $||1 - x|| \leq 1$, akkor $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{R}_+$.
(3) Ha $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, és $||x|| \leq 1$, akkor $||1 - x|| \leq 1$.

Legyen A egységelemes C^*-algebra, és $x \in A_{\mathrm{sa}}$. A következő állítások ekvivalensek.

(1) $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{R}_+$.
(2) Létezik olyan $y \in A_{\mathrm{sa}}$, hogy $x = y^2$.
(3) Létezik olyan $a \in A$, hogy $x = a^* a$.
(4) $x \in A_+$.

Továbbá, az A_+ halmaz C^*-normában zárt A-ban, és

$$A_+ \cap (-A_+) = \{0\}.$$

Ha A egységelemes C^*-algebra, akkor minden $a \in A$ elemre $1 + a^* a$ invertálható.

Legyen A C^*-algebra, és $x \in A_{\mathrm{sa}}$. A következő állítások ekvivalensek.

(1) $\mathrm{Sp}'(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.
(2) Létezik olyan $y \in A_{\mathrm{sa}}$, hogy $x = y^2$.
(3) Létezik olyan $a \in A_{\mathrm{sa}}$, hogy $x = a^* a$.
(4) $x \in A_+$.

Továbbá, az A_+ halmaz C^*-normában zárt A-ban, és

$$A_+ \cap -(A_+) = \{0\}.$$

Egy C^*-algebra önadjungált elemeinek halmazán a természetes előrendezés rendezés.

Legyen A C^*-algebra, és $\mathfrak{m} \subseteq A$ balideál A-ban. Létezik A-ban olyan $(e_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat, hogy

(1) minden $i \in I$ indexre $e_i \in \mathfrak{m} \cap A_+$ és $||e_i|| \leq 1$;
(2) minden $i, j \in I$ indexre, ha $i \leq j$, akkor $e_i \leq e_j$;
(3) minden $a \in \bar{\mathfrak{m}}$ elemre $a = \lim_{i,I}(a e_i)$ a C^*-norma szerint.

Ha A C^*-algebra, és $\mathfrak{m} \subseteq A$ C^*-normában sűrű ideál A-ban, akkor létezik A-nak olyan approximatív egysége, hogy minden $i \in I$ indexre $e_i \in \mathfrak{m} \cap A_+$, $||e_i|| \leq 1$, és minden $i, j \in I$ indexre, ha $i \leq j$, akkor $e_i \leq e_j$.

Egy C^*-algebra minden zárt ideálja *-ideál.

Legyen A C^*-algerba.

(1) Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A_+-ban haladó monoton fogyó sorozatok, és $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = 0$, akkor $\inf_{n\in\mathbb{N}}(x_n + y_n) = 0$.

(2) Ha $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ A_+-ban haladó monoton fogyó sorozat, és $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$, akkor minden $a \in A$ elemre $(a^* x_n a)_{n\in\mathbb{N}}$ A_+-ban haladó monoton fogyó sorozat, és $\inf_{n\in\mathbb{N}}(a^* x_n a) = 0$.

(3) Ha $\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ A_+-ban haladó sorozat, $x \in A$ és $x = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$ a C^*-norma szerint, akkor minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra, $n > N$ esetén $x \leq \varepsilon\tilde{1} + x_n$ teljesül $\tilde{A}$-ban.

Legyen A MSC-algebra, és $a, b \in A$. Ha $a^*a \leq b^*b$, akkor létezik olyan $c \in A$, hogy $a = cb$. Ha $a^*a = b^*b$, akkor létezik olyan $c \in A$, hogy $a = cb$ és $b = c^*a$.

Ha A MSC-algebra, akkor minden $a \in A$ elemhez létezik olyan $w \in A$, hogy $a = w|a|$ és $|a| = w^*a$ teljesül.

Egy MSC-algebrában minden ideál *-ideál.

8. *-algebrák ábrázolásai és pozitív funkcionálok

Legyen A *-algebra, $(\pi_i)_{i\in I}$ az A ábrázolásainak szummálható rendszere, és minden $i \in I$ indexre jelölje H_i a π_i ábrázolás terét. Ekkor a

$$(\cdot,\cdot) : \bigoplus_{i\in I} H_i \times \bigoplus_{i\in I} H_i \to \mathbb{C} \quad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \sum_{i\in I} (x_i, y_i)_i$$

leképezés skalárszorzás a $\bigoplus_{i\in I} H_i$ vektortér felett; jelölje $\tilde{\bigoplus}_{i\in I} H_i$ az ezzel a skalárszorzással meghatározott $\bigoplus_{i\in I} H_i$ prehilbert-tér teljes burkát. Létezik az A *-algebrának egyetlen olyan π ábrázolása a $\tilde{\bigoplus}_{i\in I} H_i$ Hilbert-térben, hogy minden $a \in A$ és $(x_i)_{i\in I}$ $\bigoplus_{i\in I} H_i$ elemre

$$\pi(a)(x_i)_{i\in I} = (\pi_i(a)x_i)_{i\in I}$$

teljesül.

Legyen π ábrázolása az A *-algebrának a H Hilbert-térben. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $H_0, H_1 \subseteq H$ zárt π-invariáns lineáris alterek, hogy $H_0 \perp H_1$, és $H = H_0 \oplus H_1$, és $\pi|H_0$ nullábrázolása és $\pi|H_1$ nemelfajult ábrázolása A-nak. A $(\pi|H_0) \oplus (\pi|H_1)$ Hilbert-összeg unitér ekvivalens π-vel.

Legyen π nemelfajult ábrázolása az A *-algebrának a H Hilbert-térben. Ekkor létezik a π ciklikus részábrázolásainak olyan $(\pi_i)_{i \in I}$ szummálható renszere, hogy $\tilde{\bigoplus}_{i \in I} \pi_i$ unitér ekvivalens π-vel.

Legyen π ábrázolása az A *-algebrának a H Hilbert-térben, és $\xi \in H$. Ekkor az

$$f_{\pi,\xi} : A \to \mathbb{C} \quad a \mapsto \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$$

leképezés olyan lineáris funkcionál, hogy minden $a \in A$ elemre

$$f_{\pi,\xi}(a^*a) \subseteq \mathbb{R}_+, \quad f_{\pi,\xi}(a^*) = \overline{f_{\pi,\xi}(a)}, \quad |f_{\pi,\xi}(a)|^2 \leq ||\xi||^2 \cdot f_{\pi,\xi}(a^*a)$$

teljesül.

Ha A *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál, akkor minden $a, b \in A$ elemre

$$f(b^*a) = \overline{f(a^*b)},$$
$$|f(b^*a)|^2 \leq f(a^*a) f(b^*b),$$

teljesül.

Ha A *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál, akkor az

$$A \times A \to \mathbb{C} \quad (a, b) \mapsto f(b^*a)$$

leképezés pozitív konjugált bilineáris funkcionál, és a

$$A \to \mathbb{R}_+ \quad a \mapsto \sqrt{f(a^*a)}$$

leképezés olyan félnorma az A komplex vektortér felett, amelyre teljesül a parallelogramma egyenlőség.

Ha A egységelemes *-algebra, akkor minden $A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál reguláris.

Ha A *-algebra, akkor az $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál pontosan akkor reguláris, ha létezik olyan $\tilde{A} \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál, amely f-nek kiterjesztése.

Legyen A *-algebra. Ha $f : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionál, akkor minden $a \in A$ elemre

$$|f(a)|^2 \leq ||f||_* \cdot f(a^* a)$$

teljesül. Továbbá, ha $f, g : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionálok és $\lambda \in \mathbb{R}_+$, akkor $f + g$ és λf is reguláris pozitív funkcionálok, és

$$||f + g||_* \leq ||f||_* + ||g||_*, \quad ||\lambda f||_* = \lambda ||f||_*.$$

Legyen A *-algebra és jelölje $A^\sharp$ az A feletti reguláris pozitív funkcionálok halmazát. Ha $r \in \mathbb{R}_+$, akkor az

$$A^\sharp(r) = \{f \in A^\sharp \quad | \quad ||f||_* \leq r\}$$

halmaz az A feletti lineários funkcionálok vektorterének konvex részhalmaza.

Ha A *-algebra, π ábrázolása A-nak a H Hilbert-térben, és $\xi \in H$, akkor $||f_{\pi,\xi}||_* \leq ||\xi||^2$, továbbá, ha a ξ vektor π-ciklikus, akkor $||f_{\pi,\xi}||_* = ||\xi||^2$.

9. A GNS-konstrukció és alkalmazásai

Ha A egységelemes Banach *-algebra és $x \in A_{\mathrm{sa}}$, akkor $||x|| \leq 1$ esetén $x \leq 1$ teljesül.

Ha A Banach *-algebra, akkor minden $f : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionál folytonos és $||f|| \leq ||f||_*$. Ha A egységelemes Banach *-algebra, akkor minden $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionálra $||f|| \leq f(1)$, továbbá, ha $||1|| = 1$, akkor $||f|| = f(1) = ||f||_*$ is teljesül.

Ha A approximatív egységes Banach *-algebra, akkor az $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál pontosan akkor folytonos, ha reguláris. Ha A olyan Banach *-algebra, amelyben létezik $(e_i)_{i \in I}$ approximatív egység, hogy minden $i \in I$ esetén $||e_i|| \leq 1$, akkor minden $f : A \to \mathbb{C}$ folytonos pozitív funkcionálra $||f|| = ||f||_*$.

Ha A Banach *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionál, akkor minden $a, b \in A$ elemre

$$|f(b^* ab)| \leq ||a|| \cdot f(b^* b).$$

Ha A egységelemes C^*-algebra, akkor az $f : A \to \mathbb{C}$ folytonos önadjungált funkcionál pontosan akkor pozitív, ha $||f|| = f(1)$.

Egy C^*-algebra felett minden pozitív funkcionál folytonos.

Legyen A *-algebra, π_1, π_2 ciklikus ábrázolása A-nak a H_1, H_2 Hilbert-térben, és $\xi_1 \in H_1$ és $\xi_2 \in H_2$ π_1- és π_2-ciklikus vektorok.

(1) Legfeljebb egy olyan $u : H_1 \to H_2$ lineáris operátor létezik, hogy $u \in C(\pi_1, \pi_2)$ és $u(\xi_1) = \xi_2$.
(2) Akkor és csak akkor létezik olyan $u : H_1 \to H_2$ unitér operátor, hogy $u \in C(\pi_1, \pi_2)$ és $u(\xi_1) = \xi_2$, ha $f_{\pi_1, \xi_1} = f_{\pi_2, \xi_2}$.

Ha A Banach *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionál, akkor létezik A-nak olyan π ciklikus ábrázolása, és a π ábrázolási terének olyan ξ ciklikus vektora, hogy $f = f_{\pi,\xi}$, vagyis minden $a \in A$ elemre $f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

Legyen A Banach *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál. Az f funkcionál pontosan akkor reguláris, ha *-reprezentálható. Ha A approximatív egységes, akkor az f *-reprezentálhatósága ekvivalens az f folytonosságával.

Ha A Banach *-algebra, π-ciklikus ábrázolása A-nak a H Hilbert-térben, és ξ π-ciklikus vektor H-ban, akkor létezik olyan $f : A \to \mathbb{C}$ reguláris funkcionál és van olyan $u : H \to H_f$ unitér operátor, amelyre $u \in C(\pi, \pi_f)$ és $u(\xi) = \xi_f$.

Ha A Banach *-algebra, $f, g : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionálok, és minden $a \in A$ esetén $f(a^*a) = g(a^*a)$, akkor $f = g$.

Legyen A Banach *-algebra és $f, g : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionálok. Ha van olyan $0 \leq c$ valós szám, amelyre $cf - g$ funkcionál pozitív, akkor van olyan $w \in C(\pi_f, \pi_f)$, hogy minden $a \in A$ esetén

$$g(a) = \langle w(\pi_f(a)\xi_f), \xi_f \rangle.$$

Legyen A Banach *-algebra, $f \in K(A)$, és tekintsük a következő kijelentéseket.

(1) A π_f ábrázolás algebrailag irreducibilis és $||f||_* = 1$.
(2) $f \in \mathrm{Ext}(K(A)) \setminus \{0\}$.
(3) A π_f ábrázolás geometriailag irreducibilis és $||f||_* = 1$.

Ekkor teljesülnek az $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ következtetések.

Ha A Banach *-algebra, akkor $K(A) \subseteq A'$ olyan konvex $\sigma(A', A)$-kompakt halmaz, amely része A'-ben a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömbnek.

Legyen A Banach *-algebra és $a \in A$. A következő állítások ekvivalensek.
(1) Létezik olyan $f : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionál, hogy $f(a) \neq 0$.
(2) Létezik olyan $f : A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionál, hogy $f(a^*a) > 0$.
(3) Létezik A-nak olyan π geometriailag irreducibilis ábrázolása, hogy $\pi(a) \neq 0$.
(4) Létezik A-nak olyan π ábrázolása, hogy $\pi(a) \neq 0$.
Ha A-nak létezik hű ábrázolása, akkor ezek az állítások ekvivalensek azzal, hogy $a \neq 0$.

Legyen A Banach *-algebra, és minden $a \in A$ elemre

$$v_a = (\pi_f(a)\xi_f)_{f \in K(A)} \in \prod_{f \in K(A)} H_f,$$

továbbá $H_A = \{v_a \quad | \quad a \in A\}$.
(1) A H_A lineáris altere a $\prod_{f \in K(A)} H_f$ lineáris szorzattérnek, és minden $x, y \in H_A$ elemre a

$$K(A) \to \mathbb{C} \qquad f \mapsto \langle x(f), y(f) \rangle_{H_f}$$

leképezés folytonos, és minden $a \in A$ és $x \in H_A$ vektorra

$$\big(\pi_f(a)(x(f))\big)_{f \in K(A)} \in H_A.$$

(2) Ha μ pozitív Radon-mérték a $K(A)$ kompakt tér felett, akkor a

$$||\cdot||_\mu : H_A \to \mathbb{R}_+ \qquad x \mapsto \sqrt{\int_{K(A)} ||x(f)||^2_{H_f}\, d\mu(f)}$$

leképezés Hilbert-félnorma H_A felett.
(3) Legyen μ pozitív Radon-mérték a $K(A)$ kompkakt tér felett. Jelölje H_μ a $H_A/\ker(||\cdot||_\mu)$ prehilbert-tér teljes burkát, és minden $x \in H_A$ elemre legyen $x^{\cdot}$ az x ekvivalencia-osztálya $H_A/\ker(||\cdot||_\mu)$-ben. Ekkor az

$$A \to H_\mu \qquad a \to v_a^{\cdot}$$

leképezés a normák szerint folytonos lineáris operátos, továbbá létezik egyetlen olyan

$$\pi_\mu : A \to \mathcal{L}(H_\mu)$$

ábrázolás, hogy minden $x, y \in H_A$ és $a \in A$ elemre fennáll a

$$\langle \pi_\mu(a)x^{\cdot}, y^{\cdot} \rangle_\mu = \int_{K(A)} \langle \pi_f(a)x(f), y(f) \rangle_{H_f}\, d\mu(f)$$

egyenlőség.

Legyen A Banach*-algebra, és μ valószínűségi Radon-mérték a $K(A)$ kompakt tér felett. Ekkor a

$$\int_{K(A)} \pi_f \, d\mu(f) \quad \text{és} \quad \pi_{b(\mu)}$$

ábrázolások unitér ekvivalensek, ezért a

$$\int_{K(A)} \pi_f \, d\mu(f)$$

ábrázolás ciklikus.

Legyen A szeparábilis Banach *-algebra, és π ciklikus ábrázolása A-nak. Létezik olyan μ valószínűségi Radon-mérték a $K(A)$ kompakt konvex halmaz felett, hogy μ koncentrált az $\mathrm{Ext}(K(A))$ halmazon és

$$\int_{K(A)} \pi_f \, d\mu(f)$$

unitér ekvivalens π-vel.

Legyen A kommutatív Banach *-algebra, és jelölje $\mathcal{M}_+^b(X_{\mathrm{sa}}(A))$ a $\bar{C}_0(X_{\mathrm{sa}}(A), \mathbb{C})$ C^*-algebra feletti pozitív funkcionálok halmazát. Legyen továbbá $A^\sharp$ az $A \to \mathbb{C}$ reguláris pozitív funkcionálok halmaza. Minden $\mu \in \mathcal{M}_+^b(X_{\mathrm{sa}}(A))$ funkcionálra $\mu \circ \mathcal{G}_{A,\mathrm{sa}} \in A^\sharp$, és az

$$\mathcal{M}_+^b(X_{\mathrm{sa}}(A)) \to A^\sharp \qquad \mu \mapsto \mu \circ \mathcal{G}_{A,\mathrm{sa}}$$

leképezés olyan bijekció, hogy minden $\mu \in \mathcal{M}_+^b(X_{\mathrm{sa}}(A))$ elemre $||\mu \circ \mathcal{G}_{A,\mathrm{sa}}|| \leq ||\mu||$. Ha A-nak van olyan $(e_i)_{i \in I}$ approximatív egysége, hogy minden $i \in I$ esetén $||e_i|| \leq 1$, akkor minden $\mu \in \mathcal{M}_+^b(X_{\mathrm{sa}}(A))$ elemre $||\mu \circ \mathcal{G}_{A,\mathrm{sa}}|| = ||\mu||$ teljesül.

10. Banach *-algebrák hű ábrázolásai

Minden C^*-algebrában létezik hű ábrázolása, és C^*-algebra bármely hű ábrázolása izometria.

Az A *-algebrának pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha létezik A felett pre-C^*-norma.

Az A Banach *-algebrának pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha az $A \to St(A)$ kanonikus leképezés injektív.

Az A kommutatív Banach *-algebrának pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha minden $a \in A \setminus \{0\}$ elemhez létezik A-nak olyan χ önadjungált karaktere, hogy $\chi(a) \neq 0$.

Legyen A Banach *-algebra, és jelölje $||\cdot||_{St}$ a legnagyobb A feletti C^*-félnormát. Legyen továbbá $\mathrm{Rep}(A)$ az A ábrázolásainak osztálya és $\mathrm{Irr}(A)$ az A geometriailag irreducibilis ábrázolásainak osztálya. Ekkor minden $a \in A$ elemre

$$\sup_{f \in \mathrm{Ext}(K(A))} \sqrt{f(a^*a)} = \sup_{\pi \in \mathrm{Irr}(A)} ||\pi(a)|| = \sup_{\pi \in \mathrm{Rep}(A)} ||\pi(a)|| = \sup_{f \in K(A)} \sqrt{f(a^*a)} = ||a||_{St}.$$

Ha A C^*-algebra, akkor létezik az A geometriailag irreducibilis ábrázolásainak olyan $(\pi_i)_{i \in I}$ rendszere, hogy minden $a \in A$ elemre

$$||a|| = \sup_{i \in I} ||\pi_i(a)||.$$

Ha A szeparábilis C^*-algebra, akkor létezik az A geometriailag irreducibilis ábrázolásainak olyan $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $a \in A$ elemre

$$||a|| = \sup_{n \in \mathbb{N}} ||\pi_n(a)||.$$

Ha A C^*-algebra és $x \in A_{\mathrm{sa}}$, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(1) $x \in A_+$.
(2) Minden $f : A \to \mathbb{C}$ funkcionálra $f(x) \in \mathbb{R}_+$.
(3) Az A minden π ábrázolására $\pi(x)$ pozitív operátor.
(4) Az A-nak létezik olyan π hű ábrázolása, amelyre $\pi(x)$ pozitív operátor.

Legyen A C^*-algebra és $P(A) = \mathrm{Ext}(K(A)) \setminus \{0\}$. A $K(A)$ és $P(A)$ halmazokat lássuk el a $\sigma(A', A)$ topológia leszűkítésével. Ekkor az

$$A_{\mathrm{sa}} \to C(K(A), \mathbb{R}) \qquad x \mapsto (f \mapsto f(x));$$
$$A_{\mathrm{sa}} \to C^b(P(A), \mathbb{R}) \qquad x \mapsto (f \mapsto f(x));$$

leképezések szigorúan rendezéstartó $\mathbb{R}$-lineáris izometriák. (Itt a $C(K(A), \mathbb{R})$ és $C^b(P(A), \mathbb{R})$ függvénytereket sup-normával látjuk el.)

Ha A normált *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ önadjungált folytonos lineáris funkcionál, akkor

$$||f|| = ||(f|_{A_{\mathrm{sa}}})||.$$

Ha A C^*-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ önadjungált lineáris funkcionál. Az f pontosan akkor folytonos, ha léteznek olyan $f_+, f_- : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionálok, hogy

$$f = f_+ - f_-, \quad \text{és} \quad ||f|| = ||f_+|| + ||f_-||.$$

Egy C^*-algebra felett egy lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos, ha előáll pozitív lineáris funkcionálok komplex lineáris kombinációjaként.

11. Baer-C^*-algebrák

Ha A olyan *-algebra, amelynek létezik hű ábrázolása, akkor a $P(A)$ halmazon a $\leq$ és $\prec$ relációk egyenlők.

Ha A pre-C^*-algebra, akkor a $P(A)$ halmazon a $\leq$ és $\prec$ relációk egyenlők.

Legyen A *-algebra, és $e, f \in P(A)$.

(1) Ha $ef = fe$, akkor $e \vee f$ és $e \wedge f$ léteznek $P(A)$-ban, és

$$e \vee f = e + f - ef \quad \text{és} \quad e \wedge f = ef.$$

(2) Ha $ef = 0$, akkor $e \vee f$ és $e \wedge f$ léteznek $P(A)$-ban, és

$$e \vee f = e + f, \quad \text{és} \quad e \wedge f = 0.$$

(3) Ha $e \prec f$, akkor $f - e \in P(A)$, és $e \vee (f - e)$ létezik $P(A)$-ban, és

$$e \vee (f - e) = f.$$

(4) Ha $ef = 0$ és $g \in P(A)$ olyan, hogy $e \prec g \prec e \vee f$, akkor $g - e \prec f$.

Ha A *-algebra és $(e_i)_{i \in I}$ nem üres véges kommutatív rendszer $P(A)$-ban, akkor $\sup_{i \in I} e_i$ és $\inf_{i \in I} e_i$ létezik $P(A)$-ban, és

$$\sup_{i \in I} e_i = \sum_{H \subseteq I, H \neq \emptyset} (-1)^{\mathrm{Card}(H)+1} \left(\prod_{i \in H} e_i \right), \qquad \inf_{i \in I} e_i = \prod_{i \in I} e_i.$$

Ha A egységelemes *-algebra, akkor az

$$\perp : P(A) \to P(A) \qquad e \mapsto e^\perp = 1 - e$$

leképezés ortokomplementáció a $P(A)$ korlátos rendezett halmaz felett.

Ha A egységelemes *-algebra, akkor $P(A)$ a $\prec$ rendezéssel és a $\perp$ leképezéssel ellátva olyan ortokomplementumos rendezett halmaz, amelyben bármely véges ortogonális rendszernek létezik szuprémuma, és minden $e, f \in P(A)$ esetén, ha $e \prec f$, akkor létezik olyan $g \in P(A)$, hogy $e \perp g$ és $e \wedge g = f$. Ha A kommutatív egységelemes algebra, akkor $P(A)$ Boole-háló.

Ha A *-algebra és $e, f \in P(A)$, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(1) Létezik $e \vee f$ a $P(A)$ halmazban a $\prec$ rendezés szerint.

(2) A

$$R_{e,f} = \{h \in P(A) \quad | \quad he = 0, \quad (f - fe)h = f - fe\}$$

halmaznak létezik $P(A)$-ban legkisebb eleme a $\prec$ rendezés szerint.

Ha A egységelemes *-algebra és $e, f \in P(A)$ olyan elemek, hogy a

$$\{h \in P(A) \quad | \quad (f - fe)h = f - fe\}$$

halmaznak létezik $P(A)$-ban legkisebb eleme a $\prec$ rendezés szerint, akkor $e \vee f$ létezik $P(A)$-ban.

Legyen A egységelemes *-algebra és

$$S = \{f - fe \quad | \quad e, f \in P(A)\}.$$

Ha minden $a \in S$ elemre a

$$\{h \in P(A) \quad | \quad ah = a\}$$

halmaznak létezik $P(A)$-ban legkisebb eleme a $\prec$ rendezés szerint, akkor $P(A)$ a $\prec$ rendezéssl és a $\perp$ leképezéssel ellátva ortomoduláris háló.

Ha A Baer-*-algebra, akkor $P(A)$ a $\prec$ rendezéssel és a $\perp$ leképezéssel ellátva ortomoduláris háló, és minden $e, f \in P(A)$ elemre:

$$e \vee f = e + \mathrm{RP}(f - fe), \quad e \wedge f = e - \mathrm{RP}(e - fe).$$

Ha A Baer-*-algebra, és B Baer-*-részalgebrája A-nak, akkor B is Baer-*-algebra, és minden $b \in B$ elemre $\mathrm{RP}(b)$ megegyezik a $b \in B$ elem B-beli jobbldali projektorával.

Ha T kompakt tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(1) A $C(T, \mathbb{C})$ függvényalgebra Baer-C^*-algebra.
(2) Minden $f \in C(T, \mathbb{C})$ függvényre $\mathrm{supp}(f)$ nyílt-zárt halmaz.
(3) A T kompakt térben a nyílt-zárt halmazok topologikus bázist alkotnak, és ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T nyílt-zárt részhalmazainak tetszőleges sorozata, akkor $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n}$ nyílt halmaz.

Ha A Baer-C^*-algebra, akkor a $P(A)$ halmaz lineáris burka sűrű A-ban a C^*-norma szerint.

Legyen H Hilbert-tér és $S \subseteq \mathcal{L}(H)$ önadjungált operátorhalmaz. Ekkor $C(S) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{Id}_H$ pontosan akkor teljesül, ha csak $\{0\}$ és H olyan zárt lineáris alterek H-ban, amelyek minden $s \in S$ operátorra nézve invariánsak.

Ha π ábrázolása az A *-algebrának, akkor π algebrai és geometriai irreducibilitása ekvivalensek.

Az A Baer-C^*-algebra pontosan akkor kommutatív, ha a $P(A)$ háló disztributív.

Ha A Baer-C^*-algebra, akkor a $P(A)$ háló σ-teljes.

12. Spektrális C^*-algebrák

Legyen $\mathcal{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, A *-algebra, és $\mathfrak{p} : \mathcal{R} \to A$ projektor-értékű additív függvény.

(1) Minden $E, F \in \mathcal{R}$ halmazra, ha $E \subseteq F$, akkor $\mathfrak{p}(E) \prec \mathfrak{p}(F)$.
(2) Minden $E, F \in \mathcal{R}$ halmazra $\mathfrak{p}(E \cap F) = \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E) \wedge \mathfrak{p}(F)$, következésképpen $\mathrm{Im}(\mathfrak{p})$ kommutatív részhalmaza $P(A)$-nak.
(3) Minden $E, F \in \mathcal{R}$ halmazra $\mathfrak{p}(E \cup F) = \mathfrak{p}(E) + \mathfrak{p}(F) - \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E) \vee \mathfrak{p}(F)$.

Legyen $\mathcal{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és A olyan Banach *-algebra, hogy a $P(A)$ halmaz korlátos az A Banach *-normája szerint.

(1) Minden $\mathfrak{p} : \mathcal{R} \to A$ projektor-értékű additív függvényhez létezik egyetlen olyan $\pi_{\mathfrak{p}} : \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R}) \to A$ folytonos *-algebra-morfizmus, hogy minden $E \in \mathcal{R}$ halmazra $\pi_{\mathfrak{p}}(\chi_E) = \mathfrak{p}(E)$ teljesül.
(2) Minden $\pi : \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R}) \to A$ folytonos *-algebra-morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\mathfrak{p}_\pi : \mathcal{R} \to A$ projektor-értékű additív függvény, hogy minden $E \in \mathcal{R}$ halmazra $\mathfrak{p}_\pi(E) = \pi(\chi_E)$.

Az A egységelemes C^*-algebra pontosan akkor infraspektrális, ha minden $a \in A$ normális elemhez van olyan

$$\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}_A(a), \mathcal{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))) \to A$$

*-algebra morfizmus, amely a $C(\mathrm{Sp}_A(a), \mathbb{C}) \to A$ folytonos függvényszámító operátornak kiterjesztése.

Ha A infraspektrális C^*-algebra, akkor $P(A)$ lineáris burka sűrű A-ban a C^*-norma szerint.

Legyen A C^*-algebra és $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre
SP1. M szétválaszt A felett, és minden $a \in A$ elemre és $f \in M$ funkcionálra $a \cdot f, f^* \in M$.
teljesül.

(1) Minden $f \in M$ és $a \in A$ elemre $f \cdot a \in M$.
(2) Az A involúciója folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint.
(3) Az A szorzása változóiban folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint.
(4) Ha $\bar{M}$ jelöli az M lezártját A'-ben a funkcionálnomra szerint, akkor $\bar{M}$-re SP1. szintén teljesül, és minden $B \subseteq A$ C^*-normában korlátos halmazra $\sigma(A, M)|B = \sigma(A, \bar{M})|B$.
(5) Ha A sorozatteljes a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, és minden A-ban haladó $\sigma(A, M)$ topológia szerint konvergens sorozat C^*-normában korlátos, akkor A sorozatteljes a $\sigma(A, \bar{M})$ topológia szerint is.

Ha $\mathcal{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor $M(T, \mathcal{R})$ olyan funkcionálnormában zárt lineáris altér $\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R})'$ térben, amely szétválsztja $\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R})$ elemeit, továbbá minden $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R})$-ben haladó sorozatra és $\phi \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R})$ függvényre $\phi = \lim_{n \to \infty} \phi_n$ pontosan akkor teljesül a $\sigma(\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R}), M(T, \mathcal{R}))$ topológia szerint, ha a $(\phi_n)_{n \in N}$ függvénysorozat sup-normában korlátos és pontonként konvergál a T halmazon ϕ-hez.

Legyen $\mathcal{B}$ σ-algebra a T halmaz felett és $\phi : T \to \mathbb{C}$ korlátos függvény. Ha létezik olyan $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat, amely $\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B})$-ben halad és pontonként konvergál ϕ-hez a T halmazon, akkor $\phi \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B})$.

Ha $\mathcal{B}$ σ-algebra a T halmaz felett, akkor az $M(T, \mathcal{B}) \subseteq \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B})'$ lineáris altérre teljesülnek az ultraspektralitási feltételek, tehát $\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B})$ ultraspektrális C^*-algebra.

Ha T σ-kompakt lokálisan kompakt tér, akkor $\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T))$ ultraspektrális C^*-algebra.

Legyen H Hilbert-tér, és minden $\xi \in H$ vektorra legyen

$$\omega_\xi : \mathcal{L}(H) \to \mathbb{C} \qquad a \mapsto \langle a(\xi), \xi \rangle.$$

Legyen A Neumann-algebra H felett, és legyen

$$M_A = sp\{\omega_\xi|_A \quad | \quad \xi \in H\},$$

valamint $\bar{M}_A$ az M_A halmaz lezártja A'-ban a funkcionálnomra szerint. Ekkor M_A és $\bar{M}_A$ olyan lineáris alterek A'-ben, amelyekre teljesülnek a ultraspektralitási feltételek, tehát A ultraspektrális C^*-algebra.

Minden ultraspektrális C^*-algebra Baer-C^*-algebra.

Ha T lokálisan kompakt tér, és $H \subseteq \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T))$ olyan halmaz, amely sorozatzárt a

$$\sigma\big(\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T)), M(T, \mathcal{B}_0(T))\big)$$

topológia szerint és $C_0(T, \mathbb{C}) \subseteq H$, akkor $H = \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T))$.

Legyen X, Y vektortér és $X' \subseteq X^*$, $Y' \subseteq Y^*$ szétválasztó altér. Tegyük fel, hogy X_0 olyan lineáris altere X-nek, hogy az X minden X_0-t tartalmazó $\sigma(X, X')$-sorozatzárt részhalmaza egyenlő X-szel. Ha Y sorozatteljes a $\sigma(Y, Y')$ topológia szerint, és $u_0 : X_0 \to Y$ olyan lineáris operátor, amely a $\sigma(X, X')|X_0$ és $\sigma(Y, Y')$ topológiák szerint folytonos, akkor u_0 egyértelműen kiterjeszthető olyan $u : X \to Y$ lineáris operátorrá, amely a $\sigma(X, X')$ és $\sigma(Y, Y')$ topológiák szerint folytonos.

Legyenek (X, X'), (Y, Y'), X_0, u_0 és u ugyanazok, mint az előző lemmában.

(1) Legyenek $\mu : X \times X \to X$ és $\nu : Y \times Y \to Y$ olyan műveletek, amelyek a $\sigma(X, X')$ és $\sigma(Y, Y')$ topológiák szerint változóikban folytonosak. Ha X_0 zárt a μ műveletre nézve (azaz $\mu(X_0 \times x_0) \subseteq X_0$) és u_0 megtartja a μ és ν műveleteket (azaz $\nu \circ (u_0 \times u_0) \subseteq u_0 \circ \mu$), akkor u is megtartja a μ és ν műveleteket (azaz $\nu \circ (u \times u = u \circ \mu)$.

(2) Legyenek $i : X \to X$ és $j : Y \to Y$ olyan egyváltozós műveletek, amelyek a $\sigma(X, X')$ és $\sigma(Y, Y')$ topológiák szerint folytonosak. Ha X_0 invariáns az i műveletre nézve (azaz $i(X_0) \subseteq X_0$), és u_0 megtartja az i és j műveleteket (azaz $j \circ u_0 \subseteq u_0 \circ i$), akkor u is megtartja az i és j műveleteket (azaz $j \circ u = u \circ i$).

Ha A ultraspektrális C^*-algebra és $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amely teljesíti az ultraspektralitási feltételeket, akkor minden T lokálisan kompakt térhez és minden

$$\pi : \bar{C}_0(T, \mathbb{C}) \to A$$

*-algebra-morfizmushoz létezik egyetlen olyan

$$\bar{\pi} : \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T)) \to A$$

*-algebra-morfizmus, amely π-nek kiterjesztése, és amely a

$$\sigma\big(\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T)), M(T, \mathcal{B}_0(T))\big)$$

és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint folytonos.

Legyen A ultraspektrális C^*-algebra és $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér amelyre teljesülnek az ultraspektralitási feltételek. Ha $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőlges ortognális projektor sorozat A-ban, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} e_k$ sor konvergens a $\sigma(A, M)$ topológia szerint és az összege egyenlő a $\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k$ elemmel, tehát a $\sum_{k\in\mathbb{N}} e_k$ sor $\sigma(A, M)$ topológia szerint független az M-től.

Legyen A ultraspektrális C^*-algebra és $\mathcal{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett. Ha

$$\pi : \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R}) \to A$$

*-algebra-morfizmus, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(1) A π leképezés folytonos a $\sigma(\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R}), M(T, \mathcal{R}))$ és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint minden olyan $M \subseteq A'$ lineáris altérre melyre teljesülnek az ultraspektralitási feltételek.

(2) Van olyan $M \subseteq A'$ lineáris altér, melyre teljesül az ultraspektralitási feltétel, és π a $\sigma(\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R}), M(T, \mathcal{R}))$ és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint folytonos.

(3) Minden $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt $\mathcal{R}$-beli sorozatra, ha $\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subseteq \mathcal{R}$, akkor

$$\mathfrak{p}_\pi\left(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}_\pi(E_k),$$

ahol $\mathfrak{p}_\pi : \mathcal{R} \to A$ az a projektor-értékű additív függvény, amelyre $E \in \mathcal{R}$ esetén $\mathfrak{p}_\pi(E) = \pi(\chi_E)$.

Legyen $\mathcal{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, A ultraspektrális C^*-algebra és $\mathfrak{p} : \mathcal{R} \to A$ projektor-értékű σ-ortoadditív függvény. Ha $\phi \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R})$ és $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R})$-ban haladó sorozat, amely pontonként konvergál a T halmazon ϕ-hez és $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_T < +\infty$, akkor

$$\int_T \phi \, d\mathfrak{p} = \lim_{n\to\infty} \int_T \phi_n \, d\mathfrak{p}$$

a $\sigma(A, M)$ topológia szerint bármely olyan $M \subseteq A'$ halmazra, amely teljesíti az ultraspektralitási feltételeket.

Legyen $\mathcal{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, H Hilbert-tér és

$$\mathfrak{p} : \mathcal{R} \to \mathcal{L}(H)$$

projektor-értékű σ-ortoadditív függvény. Ha $\phi \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R})$ valamint $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{R})$beli sorozat, amely pontonként konvergál a T halmazon ϕ-hez és $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\phi_n||_T < +\infty$, akkor

$$\int_T \phi \, d\mathfrak{p} = \lim_{n\to\infty} \int_T \phi_n \, d\mathfrak{p}$$

a H halmazon pontonként.

Legyen A ultraspektrális C^*-algebra, T lokálisan kompakt tér, és $\pi : \bar{C}_0(T, \mathbb{C}) \to A$ *-algebra-morfizmus. Létezik egyetlen olyan $\mathfrak{p} : \mathcal{B}_0 \to A$ projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, hogy a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál, a π-nek kiterjesztése, vagyis minden $\phi \in \bar{C}_0(T, \mathbb{C})$ függvényre

$$\pi(\phi) = \int_T \phi \, d\mathfrak{p}.$$

Erre a $\mathfrak{p}$ leképezésre teljesülnek a következők:

(1) Minden $E \in \mathcal{B}_0(T)$ halmazra és $\phi \in \bar{C}_0(T, \mathbb{C})$ függvényre

$$\mathfrak{p}(E)\pi(\phi) = \pi(\phi)\mathfrak{p}(E).$$

(2) Minden $E \in \mathcal{B}_0(T)$ halmazra és $\phi \in \bar{C}_0(T, \mathbb{C})$ függvényre

$$\mathrm{Sp}_{\mathfrak{p}(E)A\mathfrak{p}(E)}(\pi(\phi)\mathfrak{p}(E) \subseteq \overline{\phi(E)}.$$

(3) Az $\mathrm{Im}(\pi)$ és $\mathrm{Im}(\mathfrak{p})$ halmazok kommutánsai A-ban egyenlők:

$$C(\mathrm{Im}(\pi)) = C(\mathrm{Im}(\mathfrak{p})).$$

Legyen A ultraspektrális C^*-algebra. Minden $a \in A$ normális elemhez létezik egyetlen olyan

$$\mathfrak{p}_a : \mathcal{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a)) \to A$$

projektor-értékű függvény, hogy $\mathfrak{p}_a(\mathrm{Sp}_A(a)) = 1$ és

$$a = \int_{\mathrm{Sp}_A(a)} \mathrm{Id}_{\mathrm{Sp}_A(a)} \, d\mathfrak{p}_a.$$

Legyen H Hilbert-tér és $u \in \mathcal{L}(H)$ normális operátor. Egyértelműen létezik olyan

$$\mathfrak{p} : \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(u)) \to \mathcal{L}(H)$$

függvény, amelyre teljesülnek a következők.

(1) Minden $E \in \mathcal{B}(\mathrm{Sp}(u))$ Borel-halmazra $\mathfrak{p}(E)$ ortogonális projektor H felett.
(2) $\mathfrak{p}(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Id}_H$.
(3) Minden $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt $\mathcal{B}(\mathrm{Sp}(u))$-beli sorozatra a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k)$ operátorsor pontonként konvergens és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{p}(E_k) = \mathfrak{p}\left(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right).$$

(4)

$$u = \int_{\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Id}_{\mathrm{Sp}(u)}\, d\mathfrak{p}.$$

Legyen A C^*-algebra és P olyan részhalmaza az A-feletti pozitív lineáris funkcionálok halmazának, hogy:

(1) minden $x \in A_+$ elemre $f \in P$ funkcionálra $x \cdot f \cdot x \in P$;
(2) minden $x \in A_+ \setminus \{0\}$ elemhez van olyan $f \in P$, hogy $f(x) > 0$.

Ekkor $x, y \in A_{\mathrm{sa}}$ esetén $x \leq y$ pontosan akkor teljesül, ha minden $f \in P$ funkcionálra $f(x) \leq f(y)$.

Legyen A ultraspektrális C^*-algebra, és tegyük fel olyan $M \subseteq A'$ lineáris altér létezését, amelyre teljesülnek az ultraspektralitási feltételek és az alábbi feltétel is teljesül:
SP3. Minden $x \in A_+ \setminus \{0\}$ elemhez van olyan $f \in M$ pozitív lineáris funkcionál, hogy $f(x) > 0$.
Ekkor A MSC-algebra, és önadjungált elemek bármely C^*-nomrában korlátos monoton növő $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata konvergens a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, és

$$\lim_{n\to\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Ha T kompakt tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.

(1) A $C(T, \mathbb{C})$ spektrális C^*-algebra.
(2) Létezik olyan szürjektív

$$\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T)) \to C(T, \mathbb{C})$$

*-algebra-morfizmus, amely az $\mathrm{Id}_{C(T,\mathbb{C})}$ függvénynek kiterjesztése.
(3) A

$$\rho_T : X\big(\hat{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T))\big) \to T$$

kanonikus leképezésnek létezik folytonos jobbinverze.

Egységelemes C^*-algebra pontosan akkor spektrális, ha minden maximális kommutatív *-részalgebrája spektrális.