A III. TÍPUSÚ NEUMANN–ALGEBRÁK OSZTÁLYOZÁSA

Andai Attila

BME TTK Analízis Tanszék

2000. VI. 25.

A Neumann–algebrák elméletének alapfogalmaival megismerkedhetett az olvasó Kovács István *Pukánszky Lajos és a faktorok elmélete* [Kov] című cikkéből. A Neumann–algebrák osztályozása hosszú évtizedek óta jelent meglehetősen nehéz problémát. Az első lépéseket Neumann és Murray tette meg a 30-as években, erről jó áttekintést kap az olvasó az említett cikkből. Osztályozni legkönnyebben a triviális centrummal rendelkező Neumann–faktorokat lehet. Ezeket Murray és Neumann I., II. és III. típusokba sorolta. A három alaptípus közül legtovább a III. típus megértése tartott. Az 1970-es években az akkor kiépült Tomita-Takesaki elmélet talaján Alain Connes a III. típust III_λ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ altípusokba osztotta. Connes leírását adta a III_λ típusoknak $0 \leq \lambda < 1$ esetén. A III_1 altípushoz tartozó faktor egyértelműségének megmutatásával 1985-ben Uffe Haagerup tette teljessé az a hipervéges Neumann-faktorok osztályozását.

Bevezető

Legyen H komplex számtest feletti Hilbert-tér és jelölje $\mathcal{B}(H)$ a H korlátos lineáris operátorai halmazát. Az $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ részhalmaz

$$M' := \{a \in \mathcal{B}(H) \mid ax = xa \ \forall x \in M\}$$

az M *kommutánsa*, valamint $M'' := (M')'$ a *második kommutánsa*. Egy $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ részhalmaz *Neumann–algebra*, ha olyan egységelemes algebra, mely megegyezik a második kommutánsával valamint minden elemének az adjungáltját is tartalmazza. Az M Neumann–algebra *Neumann–faktor*, ha $M \cap M'$ csak az egységelem számszorosait tartalmazza. Egy $\varphi : M \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál

(1) *pozitív*, ha minden $x \in M$ elemre $0 \leq \varphi(x^*x)$,
(2) *hű*, ha minden $0 \neq x \in M$ esetén $0 < \varphi(x^*x)$,
(3) *nyomszerű*, ha minden $x \in M$ elemere $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$,
(4) *normális*, ha pozitív operátorok minden korlátos $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozatára

$$\varphi(\sup_{i \in I} x_i) = \sup_{i \in I} \varphi(x_i)$$

A dolgozat az OTKA T 0322662 számú támogatásával készült.
Köszönettel tartozom Petz Dénesnek a cikk megírásában nyújtott segítségéért.

teljesül,

(5) *állapot*, ha pozitív és $\varphi(\mathrm{id}_H) = 1$.

Minden M Neumann–algebrához (pozitív számszorzó erejéig egyértelműen) létezik egy a projekciók halmazán értelmezett dimenziófüggvény [Kov], melynek (normált) értékkészlete algebrai invariáns (vagyis algebrailag izomorf Neumann–algebrák esetén a normált dimenziófüggvények értékkészletei azonosak). Azon Neumann–algebrákat, melyekre a dimenziófüggvény értékkészlete csak a $0, \infty$ elemeket tartalmazza *III. típusúaknak* nevezik. Ezek további osztályozásához újabb algebrai invariánsokat kellett találni.

A Neumann–algebrák osztályozásában előforduló fontosabb tételek valamint egymáshoz való kapcsolatuk a [Dix] könyv bevezetőjében összefoglalva megtalálhatók. Az osztályozásnál használatos tételeket, egyszerűbb bizonyításokat valamint megértést segítő példákat találhat az olvasó a [Sun] könyvben.

Tomita-Takesaki elmélet

A következőkben olyan Neumann–algebrákkal foglalkozunk, melyek egy komplex szeparábilis Hilbert-tér operátorainak rész–Neumann–algebráiként foghatók fel. Valamilyen M Neumann–algebrát akkor tudunk eredményesen vizsgálni ha egy adott állapotához sikerül előállítani egy H Hilbert-teret és egy $\pi : M \to \mathcal{B}(H)$ algebra-izomorfizmust, mellyel az adott állapot vektorállapottá válik. A megoldás a *Gelfand-Najmark-Segal* (*GNS*) *konstrukció*, melynek csak a végeredményére szorítkozva azt mondhatjuk, hogy:

Tétel. *Ha φ egy hű normális állapot az M Neumann–algebrán, akkor létezik egy $(H_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi)$ hármas, ahol*

(1) *H_φ komplex szeparábilis Hilbert-tér, és $\pi_\varphi : M \to \mathcal{B}(H_\varphi)$ *-algebra-homomorfizmus,*

(2) *$\Omega_\varphi \in H_\varphi$ és a $\pi_\varphi(M)\Omega_\varphi$ halmaz lezártja H_φ,*

(3) *minden $a \in M$ elemre $\varphi(a) = \langle \pi_\varphi(a)\Omega_\varphi, \Omega_\varphi \rangle$ teljesül.*

Érdemes megjegyezni, hogy adott φ hű normális állapothoz tartozó $(H_\varphi, \pi_\varphi, \Omega_\varphi)$ hármas unitér ekvivalencia erejéig egyértelmű. Ennek a GNS konstrukciónak a segítségével azonosíthajuk M-et a π_φ *-algebra homomorfizmus szerinti képével, mely része $\mathcal{B}(H_\varphi)$-nek.

Bevezetünk két új fogalmat, melyek fontos szerepet kapnak a későbbiekben. Egy $\Omega \in H$ vektor *ciklikus vektora az $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ Neumann–algebrának*, ha a

$$M\Omega := \{a\Omega \mid a \in M\}$$

altér sűrű H-ban, valamint Ω *szeparáló vektora az M algebrának*, ha minden $a \in M$ elemre az $a\Omega = 0$ egyenlőségből $a = 0$ következik.

Ha φ hű normális állapot az M Neumann–algebrán, akkor a hozzá tartozó Ω_φ vektor a H_φ Hilbert-térben ciklikus (a GNS-konstrukció miatt) valamint szeparáló (mivel φ hű állapot).

Visszatérve a GNS-tételre, kérdés maradt, hogy vajon tetszőleges M Neumann–algebra esetén létezik-e φ hű normális állapot M-en. A válasz az, hogy igen (figyelem: csak olyan M Neumann–algebrával foglalkozunk, amely ábrázolható komplex, szeparábilis Hilbert-téren). Egészen más a helyzet, ha nyomszerű φ hű normális állapot létezésére vagyunk kiváncsiak. Ekkor kiderül, hogy csak véges Neumann–algebrákon (vagyis ahol minden izometria unitér) létezik ilyen állapot. Vagyis III. típusú algebrán nincs nyomszerű, hű normális állapot. Nagy áttörést jelentett a III. típusú faktorok osztályozásában Tomita ötlete, ő ugyanis a hű normális állapotok nyomszerűségtől való eltérését kezdte el vizsgálni [Tom].

A φ állapot pontosan akkor nyomszerű, ha minden $a \in M$ esetén

$$\|\pi_\varphi(a)\Omega_\varphi\| = \|\pi_\varphi(a^*)\Omega_\varphi\|$$

teljesül. Ezért a III. típusú Neumann–algebrák esetén (sőt a végtelen Neumann–algebráknál is) gyümölcsözőnek tűnő ötlet a

$$\pi_\varphi(a)\Omega_\varphi \to \pi_\varphi(a^*)\Omega_\varphi$$

leképezés izometria erejéig való vizsgálata.

Tegyük fel, hogy $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ Neumann–algebra, és $x \in H$ ciklikus, szeparáló vektora M-nek. Tekintsük az

$$S : M\Omega \to H \qquad a\Omega \mapsto a^*\Omega$$

konjugált lineáris leképezést. Legyen $S = J\Delta^{\frac{1}{2}}$ a poláris felbontása S-nek, vagyis J konjugált lineáris izometria és Δ önadjungált pozitív (általában nem korlátos) operátor. A Δ operátort nevezik az *M Neumann–algerba moduláris operátorának*, melynek központi jelentőségét fejezi ki az alábbi tétel.

Tomita-Takesaki-tétel. *Az eddigi jelöléseket alkalmazva*

(1) *minden t valós számra $\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M$,*
(2) *$JMJ = M'$, ahol M' az M kommutánsát jelöli.*

Ez a meglehetősen bonyolultan igazolható tétel, mely központi szerepet játszik a Neumann–algebrák elméletében először Tomita [Tom] nem publikált kéziratában jelent meg. Majd 1970 körül Takesaki sokat finomított a bizonyításon és a tételnek sok lehetséges alkalmazására mutatott rá [Tak]. Az érdeklődő olvasó a tétel viszonylag rövid bizonyítását megtalálhatja Bratteli–Robinson könyvében [Bra].

A GNS-tételt és a Tomita-Takesaki tételt alkalmazva egy M Neumann–algebrára azt mondhatjuk, hogy ha φ egy hű normális állapot M-en (tudjuk, hogy ilyen létezik), akkor a π_φ leképezés segítségével $\mathcal{B}(H_\varphi)$ egy rész–Neumann–algebrájával azonosítható az M, valamint az Ω_φ vektor ciklikus és szeparáló $\pi_\varphi(M)$-re nézve. Ekkor definiálható az S_φ leképezés, melynek a polárfelbontásából megkapjuk a Δ_φ moduláris operátort. Ennek a segítségével a Tomita-Takesaki-tétel szerint minden t valós számra értelmezhető a

$$\sigma_t^\varphi(x) = \pi_\varphi^{-1}\big(\Delta_\varphi^{it}\pi_\varphi(x)\Delta_\varphi^{-it}\big)$$

automorfizmusa M-nek. Az így kapott $(\sigma_t^\varphi)_{t\in\mathbb{R}}$ egyparaméteres csoportot nevezik *moduláris automorfizmus csoportnak.* Váratlan fordulatot jelentett a Neumann–algebrák elméletében, hogy minden hű normális állapothoz tartozik egy kitüntetett automorfizmus csoport.

A következő feltételek ekvivalenciája jól szemlélteti, hogy a Δ_φ moduláris operátor tényleg a φ állapot nyomszerűségével van kapcsolatban.

(1) A φ hű állapot nyomszerű.
(2) A $\Delta_\varphi = \mathrm{id}_{H_\varphi}$ teljesül.
(3) Minden t valós számra és $a \in M$ elemre $\sigma_t^\varphi(x) = x$.

Connes-féle osztályozás

A Neumann–algebrák elméletében, a moduláris automorfizmus csoport felfedezésének hatására, előtérbe kerültek a csoporthatások vizsgálatai. Két fő kérdés volt, melyek a Neumann–algebrák további osztályozásához segítettek.

(1) Adott $(\sigma_t^\varphi)_{t\in\mathbb{R}}$ moduláris automorfizmus csoporthoz milyen algebrai invariánsokat lehetne rendelni?
(2) Ezek az algebrai invariánsok hogyan függnek a φ hű normális állapottól?

Ezekre a kérdésekre 1973-ban Connesnak sikerült az osztályozást nagy mértékben előremozdító pozitív választ adnia [Con]. Nem a történelmi úton haladva, hanem az utólag egyszerűsített módszereken keresztül nézzük meg Connes gondolatát.

Connes jelölését alkalmazva adott M Neumann–algebra esetén használjuk az

$$S(M) := \bigcap_{\substack{\varphi \text{ hű normális} \\ \text{állapot}}} \left\{\mathrm{sp}(\Delta_\varphi)\right\}$$

rövidítést, ahol sp jelöli az operátor spektrumát. A definícióból rögtön adódik, hogy $S(M)$ algebrai invariáns, továbbá zárt részhalmaza $\mathbb{R}_0^+$-nak. Ha M Neumann–faktor, akkor a

$$\Gamma(M) := S(M) \setminus \{0\}$$

halmaz az M *Neumann–algebra Connes–spektruma.* (Tetszőleges Neumann–algebrának értelmezhető a Connes–spektruma egy összetettebb definíció segítségével. Mivel a célunk a III. típusú faktorok osztályozása így a továbbiakban elég lesz, ha csak faktorra definiáljuk a Connes–spektrumot ezen az egyszerűbb módon.)

A III. típusú Neumann–algebrák osztályozása szempontjából döntő fontosságú az alábbi tétel.

Tétel. *Adott M Neumann–faktor esetén a $\Gamma(M)$ halmaz megegyezik valamelyik halmazzal a következők közül:*

$$(0) \qquad \Gamma(M) = \{1\},$$

$$(\lambda) \qquad \Gamma(M) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \lambda \in]0,1[,$$

$$(1) \qquad \Gamma(M) =]0,\infty[.$$

Továbbá, ha M I. vagy II. típusú Neumann–algebra, akkor $\Gamma(M) = \{1\}$.

A tételnek megfelelően az M III. típusú Neumann faktorról azt mondjuk, hogy

(1) III_0 *típusú*, ha $\Gamma(M) = \{1\}$,
(2) III_λ *típusú* valamilyen $0 < \lambda < 1$ valós számra, ha $\Gamma(M) = \{\lambda^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
(3) III_1 *típusú*, ha $\Gamma(M) =]0,\infty[$.

Nemtriviális kérdés, hogy adott $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén a III_λ osztályba tartozik-e Neumann–algebra, és ha igen hány nem izomorf algebra van III_λ-ban.

Az első kérdésre pozitív a válasz. Kovács István cikkében pontos konstrukció olvasható tetszőleges $0 < p < \frac{1}{2}$ valós paraméterhez tartozó $\mathbf{M}_p$ Neumann–algebra előállításáról. Bevezetve a $\lambda = \frac{p}{1-p}$ paramétert igazolható, hogy Pukánszky által konstruált $\mathbf{M}_p$ Neumann–algebrák hipervéges faktorok és az III_λ osztályba tartoznak. További példák olvashatók III_λ faktorokra például [Bra], [Sun] és [Dix] műveiben. A Neumann–algebrák egy fontos osztályáról a *csoport Neumann–algebrákról* a [Pet] cikkben található bevezető jellegű, egyszerűbb bizonyításokat is tartalmazó ismertető.

Az izomorfia erejéig való egyértelműséget a hipervéges algebrák körében Connes bizonyította be a III_1 típus kivételével. Ezt az eredményét Fields-éremmel is elismerték. Pár évvel később Haagerupnak sikerült a III_1 esetre is bebizonyítani az egyértelműséget [Haa].

Legyen M III_λ Neumann–faktor, valamilyen $0 < \lambda < 1$ számra és φ egy hű normális állapot M-en. Ekkor $(\sigma_t^\varphi)_{t\in\mathbb{R}}$ moduláris automorfizmus csoport segítségével pontosan meg lehet határozni M típusát. Tekintsük a

$$T(M) := \{t \in \mathbb{R} \mid \exists u \in M : \; uu^* = u^*u = \mathrm{id}_H, \; \forall x \in M : \; \sigma_t^\varphi(x) = uxu^*\}$$

halmazt, vagyis azon valós számok halmazát melyre σ_t^φ belső automorfizmusa M-nek. Ekkor létezik olyan T pozitív valós szám, hogy $T(M) = T \cdot \mathbb{Z}$. Ez a T szám független a φ hű állapottól, és csak az M-re jellemző mennyiség. Bevezetve a $\lambda := \exp(\frac{2\pi}{T})$ jelölést igazolható, hogy M III_λ típusú Neumann–algebra [Con].

Irodalomjegyzék

[Bra] O. Bratteli és D. W. Robinson *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1* második kiadás, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1987.

[Con] A. Connes *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. École Norm Sup. **6**, 133–252

[Dix] Jacques Dixmier *Von Neumann Algebras*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1981.

[Haa] Uffe Haagerup *Connes bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1*, Acta Math. **158** (1987), 95-148.

[Kov] Kovács István *Pukánszky Lajos és a faktorok elmélete*, Matematikai Lapok, 2000. ???

[Pet] Petz Dénes *Lokálisan kompakt csoportok: csoport Neumann–algebra és dualitás*, Matematikai Lapok, **29**/4

[Sun] V. S. Sunder *An invitation to von Neumann Algebras*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo, 1986.

[Tak] M. Takesaki *Tomita's theory of modular Hilbert-algebras and its applications*, Lecture Notes in Mathematics, **128**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[Tom] M. Tomita *Quasi-standard von Neumann algebras*, nem publikált