Nem lokálisan kompakt topologikus csoportok néhány reprezentálhatósággal kapcsolatos tulajdonsága

Andai Attila

Legyen G topologikus csoport, X topologikus tér és $\tau : G \times X \to X \quad (g,x) \mapsto \tau_g x$ folytonos leképezés, melyre teljesül, hogy

(1) minden $g, h \in G$ és $x \in X$ esetén $\tau_g \tau_h x = \tau_{gh} x$,
(2) minden $x \in X$ esetén $\tau_{e_G} x = x$.

Ekkor τ *folytonos csoporthatás*, és az (X, G, τ) hármas *topologikus dinamikai rendszer.*

A τ csoporthatás *effektív*, ha minden $e_G \neq g \in G$ esetén τ_g nem az X identitása, azaz minden $g \in G$, $g \neq e_G$ esetén létezik olyan $x \in X$, hogy $\tau_g x \neq x$. A τ hatás *szabad* ha minden $x \in X$ elemen nem triviálisan hat a τ, azaz minden $e_G \neq g \in G$ és minden $x \in X$ elemre $\tau_G x \neq x$.

Teleman tétele 1957. Minden G Hausdorff topologikus csoport effektíven hat

(1) egy Banach-téren izometriaként,
(2) egy kompakt téren.

Legyen V a G egy környezetbázisa, ekkor

$$V_{\ulcorner} := \{(g,h) \in G \times G \quad | \quad gh^{-1} \in V\}$$

bázis egy $\mathcal{U}_{\ulcorner}$ uniform struktúrát határoz meg a G csoporton, ez a *jobb ekvifolytonos uniform struktúra.* A G csoport természetes hatása az uniform struktúrán:

$$\tau_g(h,f) := (hg, fg).$$

Az $\mathcal{U}_{\urcorner}$ *bal ekvifolytonos uniform struktúrát* az

$$V_{\urcorner} := \{(h,g) \in G \times G \quad | \quad gh^{-1} \in V\}$$

bázis határozza meg.

Legyen $C^{\mathrm{b}}_{\ulcorner}(G)$ a komplex vagy valós értékű uniform folytonos korlátos függvények vektortere. Az f függvény uniform folytonosságát a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V : e_G \in V \quad \text{és} \quad \forall x, y \in G : \left(xy^{-1} \in V \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right)$$

formula fejezi ki. A $C^{\mathrm{b}}_{\ulcorner}(G)$ tér ellátható szupremum normával:

$$\|f\| := \sup_{g \in G} |f(g)|.$$

Ekkor $(C^{\mathrm{b}}_{\ulcorner}(G), \|\cdot\|)$ Banach-tér Jelölje E ezt a Banach-teret.

Ha egy G topologikus csoport esetén a jobb- és bal ekvifolytonos uniform struktúrák egybeesnek akkor a G topologikus csoportot *kis invariáns szomszédokkal rendelkező* csoportnak vagy *kiegyensúlyozott* csoportnak nevezzük. (Angolul *SIN group - Small Invariant Neighbourhoods* - vagy *balanced group*.)

A Teleman tételben szereplő Banach-tér lehet E, amin a csoporthatás:

$$g \in G, f \in E: \quad (L_g f)(x) := f(gx).$$

Ekkor $L : G \times E \to E$ lineáris izometria, és folytonos effektív hatás.

A Teleman tételben szereplő kompakt tér az E tér duálisának (E'-nek) a gyenge *-topológiával ellátott egységgömbje. A G hatása ezen a téren:

$$g \in G, \phi \in E', f \in E: \quad (g\phi)(f) := \phi(Lg^{-1}f).$$

Ez egy folytonos csoporthatása G-nek.

Uspenskij 1985. A második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő csoportoknak $\mathrm{Homeo}_c(I^\omega)$ univerzális csoportja.

Bizonyítás: Ekkor E szeparábilis, E' Fréchet-tér (teljesen metrizálható lokálisan konvex tér) ennek a B egységgömbje pedig kompakt. (Az E' a gyenge *-topologiával van ellátva.) Ezért B homeomorf az I^ω Hilbert-kockával (Keller-tétel miatt). Ekkor

$$G \hookrightarrow \mathrm{Homeo}_c(B) \simeq \mathrm{Homeo}_c(I^\omega).$$

Teleman, 1957. Minden G Hausdorff topologikus csoport beágyazható $\mathrm{Iso}(E)_s$ csoportba, ami egy alkalmas E Banach-tér izometriacsoportja az erős operátortopológiával ellátva.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy az E Banach-tér választható-e mindig reflexívnek. Erre Megrelishvili adott negatív választ, megmutatta, hogy $\mathrm{Homeo}_+(I)$ (az I zárt intervallumnak az összes irányítástartó homeomorfizmusa a kompakt-nyílt topológiával ellátva) nem ágyazható be reflexív Banach-tér izometriacsoportjába.

Vizsgáljuk meg, léteznek-e olyan topologikus csoportok, melyeknek kevés folytonos unitér ábrázolása van? Ehhez azonban vezessünk be további segédfogalmakat.

Legyen $\mathcal{A}$ az X részhalmazaiból álló σ-algebra. Az

$$\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_0^+$$

leképezés *szubmérték* (*submeasure*), ha

(1) megszámlálhatóan szubadditív: $\phi(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \phi(A_i)$,
(2) monoton: ha $A \subseteq B$ akkor $\phi(A) \leq \phi(B)$,
(3) $\phi(\emptyset) = 0$.

Egy ϕ szubmérték *patológikus* (*pathological*), ha nem azonosan nulla és nincs olyan σ-additív mérték $(X, \mathcal{A})$-n melynek minden nullhalmaza ϕ szerint is nullhalmaz.

Megmutatható, hogy minden atommentes σ-algebrán létezik patológikus szubmérték. Speciálisan az $X = \{0,1\}^\omega$ Cantor-halmaz Borel-halmazain is létezik ϕ patológikus szubmérték. A ϕ-ről feltehetjük, hogy $\phi(V) > 0$ ha V nemüres nyílt és zárt részhalmaza X-nek. A $C(X)$ vektorteret lássuk el a ϕ szubmérték szerinti konvergencia topológiájával, azaz a nulla környezetei az

$$V_{\varepsilon,\delta} := \Big\{ f \in C(X) \quad | \quad \phi(\{x \in X | \quad |f(x)| > \delta\}) < \varepsilon \Big\}$$

alakban írhatók, ahol $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a $C(X)$ additív topologikus csoportnak nincs nemtriviális erősen folytonos unitér ábrázolása.

Egy bonyolultabb konstrukció segítségével Banaszczyk megmutatta olyan kommuatív Banach-Lie csoport létezését melynek nincs nemtriviális unitér erősen folytonos ábrázolása.

Az $f : G \to \mathbb{C}$ függvény *pozitív definit*, ha minden véges $(g_i)_{i=1\ldots n} \in G^n$ és $(\lambda_i)_{i=1\ldots n} \in \mathbb{C}^n$ esetén

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_j f(g_i^{-1} g_j) \geq 0.$$

Szoros kapcsolat található a pozitív definit függvények és az unitér ábrázolások között. Legyen

$$\pi : G \to \mathcal{U}(H)$$

unitér ábrázolás és $\xi \in H$ tetszőleges vektor. Ekkor az

$$f_{\pi,\xi} : G \to \mathbb{C} \qquad g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$$

funkcionál pozitív definit. Fordítva: legyen $f : G \to \mathbb{C}$ pozitív definit funkcionál és $\mathcal{H} := \mathrm{Span}\{g | g \in G\}$ komplex vektortér az $\langle g, h \rangle := f(g^{-1}h)$ skalárszorzással. A $H := \bar{\mathcal{H}}$ Hilbert-téren ekkor egy természetes unitér ábrázolása adható meg a G csoportnak.

A fenti konstrukció alapján belátható, hogy egy G topologikus csoport pontosan akkor ágyazható be egy H Hilbert-tér $\mathcal{U}(H)_s$ unitér csoportjába, ha a folytonos pozitív definit funkcionálok szétválasztják G pontjait és zárt részhalmazait.

W. Veech, 1977. Minden lokálisan kompakt csoportnak létezik szabad hatása kompakt téren.

Legyen G topologikus csoport, a $\phi : C^b_{\hookrightarrow} \to \mathbb{R}$ lineáris pozitív funkcionál *invariáns átlag* (*invariant mean*), ha minden $g \in G$ csoportelemre és $f \in C^b_{\hookrightarrow}$ függvényre

$$\phi(f) = \phi(g \cdot f).$$

A G topologikus csoport *amenábilis* (*amenable*), ha létezik rajta invariáns átlag.