

Matematika MC, 3. hét

Sorozatok

I. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozatok határértéke végtelen a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $K = 100$ korláthoz.

1. $a_n = n^2 - 3n + 3$
2. $a_n = \sqrt{n^2 - n}$
3. $a_n = 2^n - 2n$

II. Mutassuk meg az alábbi határértékeket a definíció szerint, speciálisan adjunk meg egy küszöbindexet a $\varepsilon = 10^{-3}$ korláthoz.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n - 3}{2n + 1} = 4$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n - 5}{2n^2 + 2n + 2} = 3$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt{n} + \sin n}{n + 2} = 2$

Speciális sorozatok konvergenciája

I. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét. (Rendőr-elv használható.)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 6}{3n^2 - 1}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!(5+2n)}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + 3\sqrt{n} - 9)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 10n - 2}{5n^3 + 2n^2 + n + 1}$

II. Keressük meg az alábbi gyökös kifejezések határértékét.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 + n})$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + n})$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 5n + 1} - \sqrt{2n^2 + 5n})$

III. Határozzuk meg az alábbi rekurzióval definiált sorozatok határértékét!

1. $a_{n+1} = 4 + \frac{a_n}{2}$, $a_1 = 4$
* Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n = 8 - \frac{8}{2^n}$.
2. $b_{n+1} = \sqrt{b_n + 2}$, $b_1 = 1$
* Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}\right)$.