Matematika MC, 4. hét

Elemi sorösszegek és geometriai sorok

I. Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} = 3$ 3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\log 2$

II. Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-4^n+5(-1)^n}{3^{2n}}$

III. A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-8n^2+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n+3}{2n^4+2n^2+7}$ 4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+3}{2n^5+2n^2+7}$

Neumann-összegzése és geometriai valószínűség

I*. Egy kiskocsi kezdetben d ($d \in \mathbb{R}^+$) távolságra van a faltól. Mikor elindul v ($v \in \mathbb{R}^+$) sebességgel a fal felé, egy u ($u > v$) sebességgel repülő légy is elindul a kiskocsitól a falhoz, majd a falat elérve visszarepül a kiskocsihoz, majd megint a fal felé repül. Addig folytatja a repülést, amíg a kiskocsi el nem éri a falat.

1. Mutassuk meg, hogy amikor a légy n-edik alkalommal tér vissza a kiskocsira, akkor a kiskocsi távolsága a faltól $d_n = d \cdot \left(\frac{u-v}{u+v}\right)^n$ és a légy által addig megtett út
$$s_n = 2d \cdot \frac{u}{u+v} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u-v}{u+v}\right)^k .$$
2. Mivel a kiskocsi $T = \frac{d}{v}$ idő alatt eléri a falat, ezért a légy által összesen megtett út $s = Tu$. A $\lim_{n\to\infty} s_n = Tu$ formulából származtassuk a geometriai sor összegére vonatkozó $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ képletet a $0 < q < 1$ esetre.

II*. Adott egy érménk, amit feldobva p $(0 < p < 1)$ valószínűséggel fejet kapunk és $1-p$ valószínűséggel írást.

1. Tegyük fel, hogy az érménket ötször dobjuk fel. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál kaptunk először írást $p_k = p^{k-1}(1-p)$ $(k = 1, 2, \ldots, 5)$, valamint annak a valószínűsége, hogy egyáltalán nem kaptunk írást $p_F = p^5$. Továbbá igazoljuk, hogy

$$p_F + \sum_{k=1}^{5} p_k = 1$$

teljesül. Ebből vezessük le a $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} p^k = \frac{1-p^5}{1-p}$ összefüggést.

2. A fenti gondolatmenetet átfogalmazva igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra és $p \in]0,1[$ paraméterre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$ teljesül.