

## Matematika MC, 5. hét

### Függvények határértéke

I. Az  $\varepsilon = 10^{-2}$  értékhez keressünk olyan  $\delta \in \mathbb{R}^+$  paramétert, hogy az alábbi határértékeknél teljesüljön a határérték definíciójában szereplő egyenlőtlenség.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 4) = 10 \quad 2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 3}{3x + 2} = 1 \quad 3. \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$$

II. Az  $\varepsilon = 10^{-2}$  értékhez keressünk olyan  $K \in \mathbb{R}^+$  paramétert, hogy az alábbi határértékeknél teljesüljön a határérték definíciójában szereplő egyenlőtlenség.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad 2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x + 2} = 2 \quad 3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

III. Tanult tételek felhasználásával igazoljuk, hogy az alábbi  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények folytonosak.

$$1. \quad f(x) = \sqrt{1 + 2^x \cdot x^2} + \frac{\sin(2x)}{2 + \cos x} \quad 2. \quad g(x) = e^{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^{17} + (\sin \cos x) + 11 \operatorname{arctg} x}{\pi^x + 4}$$

### Bolzano-tétel következményei

I. Bolzano-tétel következményei.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokszámú polinomnak van zérushelye.
2. Mutassuk meg, hogy létezik olyan  $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , melyre  $x_0 \sin x_0 = \frac{\pi}{4}$  teljesül.
3. Igazoljuk, hogy egy négyzet alakú asztalt minden folytonos felületű padlón el lehet úgy forgatni a középpontja körül, hogy egyszerre mind a négy lába a padlón álljon.
4. Igazoljuk, hogy minden pillanatban van olyan pont a Földön, ahol ugyanakkora a hőmérséklet, mint a vele átellenes pontban.
- 5\*. Igazoljuk, hogy minden pillanatban van olyan pont a Földön, ahol ugyanakkora a hőmérséklet és a légnomás, mint a vele átellenes pontban.