

## Matematika MC, 7. hét

### Függvények monotonitása

I. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol az alábbi függvények monoton nőnek, illetve csökkennek.

$$p(x) = x^3 - x^2 - 16x + 16 \quad f(x) = x^3 e^{-3x} \quad g(x) = \arctg(1+x) - \ln(2+2x+x^2)$$

II. Határozzuk meg az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  függvény értékkészletét.

### Függvények szélsőértéke

I. Szélsőérték feladatok.

1. Legyen  $T \in \mathbb{R}^+$  egy körcikk területe. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
2. Legyen  $K \in \mathbb{R}^+$  egy körcikk kerülete. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
3. Határozzuk meg az  $r \in \mathbb{R}^+$  sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
4. Határozzuk meg az  $r \in \mathbb{R}^+$  sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
5. Határozzuk meg a  $V \in \mathbb{R}^+$  térfogatú, felül nyitott, legkisebb felszínű henger adatait!
6. Adott  $V \in \mathbb{R}^+$  térfogatú, négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkora legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?

### Haladóbb feladatok

I. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az  $f$  függvény differenciálható, a 0 pontban lokális minimuma van, azonban  $f'$  nem vált előjelet a 0 pontban (vagyis a 0 bármely környezetében  $f'$  felvesz pozitív és negatív értékeket is).

II. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az  $f$  függvény differenciálható,  $f'(0) = 1$ , azonban  $f$  nem monoton a 0 pont egyetlen környezetében sem (vagyis a 0 bármely környezetében  $f'$  felvesz pozitív és negatív értékeket is).