Matematika MC, 8. hét

Taylor-polinom

I. Legyen $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ és $x_0 = 100$.

1. Igazoljuk, hogy az f függvény x_0 pont körüli másodfokú Taylor-polinomja
$$p(x) = 5 + \frac{x}{20} - \frac{(x-100)^2}{8000}.$$
2. Számológép használata nélkül igazoljuk, hogy a fenti Taylor-polinom $\sqrt{120} \approx 10,95$ becslést adja.
3. A Taylor-formula hibatagja alapján igazoljuk, hogy $\left|\sqrt{120} - 10,95\right| \leq \frac{1}{200}$.

II. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ és $x_0 = 0$.

1. Igazoljuk, hogy az f függvény x_0 pont körüli harmaddfokú Taylor-polinomja
$$p(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$
2. Számológép használata nélkül igazoljuk, hogy a fenti Taylor-polinom $\sin 0,6 \approx 0,564$ becslést adja.
3. A Taylor-formula hibatagja alapján igazoljuk, hogy $|\sin 0,6 - 0,564| \leq \frac{6}{1000}$.

Függvények lokális szélsőértéke

I. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit az adott $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon.

1. $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x$, $I = \mathbb{R}$
2. $p(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 17$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = x + \frac{4}{x}$, $I =]0, \infty[$
4. $g(x) = \sin x + \cos x$, $I = [0, \pi]$

Függvényvizsgálat

Teljes függvényvizsgálatnál válaszoljunk az alábbi kérdésekre: hol értelmezett a függvény, mi a határértéke a plusz- és mínusz végtelenben, illetve a $\operatorname{Dom} f$ halmaz határpontjaiban, hol monoton növő illetve csökkenő a függvény, hol van lokális szélsőértéke, és a milyen jellegű szélsőérték (maximum, minimum), hol van globális minimuma illetve maximuma a függvénynek, mi a függvény értékkészlete.

I. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{1+x}$ függvényen.