

Matematika MC, 9. hét

Határozott integrál

I. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} & 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 & 3. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{3} \\ 4. \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx = \ln 2 & 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} \, dx = \frac{1}{2} & 6. \int_{-1}^1 x^{19} \cos(x^2+3) \, dx = 0 \end{array}$$

II. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ és $a \in \mathbb{R}^+$.

1. Adott $n \in \mathbb{N}^+$ esetén tekintsük a $[0, a]$ intervallumnak az $\left(\frac{ka}{n}\right)_{k=0, \dots, n}$ felosztását. Adjuk meg az f függvény ezen felosztáshoz tartozó alsó és felső közelítő összegét az alábbi formula felhasználásával.

$$\forall N \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

2. Közelítő összegekkel és a Newton–Leibniz-formula alkalmazásával is igazoljuk az alábbi képletet.

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{a^3}{3}$$

3. Vasútnál előírás, hogy az utasok kényelme miatt a szerelvény rándulása (gyorsulás időegység alatti változása) nem lehet több mint $0,5 \text{ m/s}^3$. Legalább milyen hosszú utat tesz meg az álló helyzetből induló szerelvény a 90 km/h sebesség eléréséig?

III. Legyen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^8} \, dt$ és $g(x) = \int_x^{-x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt$. Határozzuk meg az f és g függvény deriváltját!

IV. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_a^\infty \frac{1}{x^3} \, dx & 2. \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx & 3. \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{a+bx^2} \, dx \\ 4. \int_0^\infty \frac{a-1}{x^2+(a+1)x+a} \, dx & 5. \int_0^\infty e^{-x} \, dx & 6. \int_{-\infty}^\infty a^{-|x+b|} \, dx \end{array}$$

V. Számoljuk ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ határértéket.