Matematika MC, 11. hét

Parciális deriválás

I. Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \mapsto x^2 + \cos(xy) + (z - y)^2$$

függvény alábbi parciális deriváltjait.

1. $(\partial_x f)(1, 0, 2)$
2. $(\partial_y f)(x, y, z)$
3. $(\partial_z \partial_y f)(1, 0, 2)$

II. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

$$1. \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)((\sin x)(\sin y)) = 0$$

$$2. \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4y}}\right) = 0$$

III. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor az (x_0, y_0) pontbeli érintősíkjának az egyenlete

$$z = (\partial_x f)(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + (\partial_y f)(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Határozzuk meg az alábbi f függvények, P pontbeli érintősíkjának az egyenletét.

1. $f(x, y) = (1 + 2x + 3y)^2 \qquad P = (2, 1)$
2. $f(x, y) = \dfrac{1}{xy} \qquad P = (1, 1)$

Gradiens és iránymenti derivált

I. Vizsgáljuk az $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = 3y + xy^2 + x^3 \qquad g(x, y) = (x^2 - y)^2$$

függvényeket az $a = (0, 1)$ pontban.

1. Adjuk meg a $(\operatorname{grad} f)(a)$ és a $(\operatorname{grad} g)(a)$ vektort.
2. Adjuk meg a $(\mathrm{D}f)(a)$ és a $(\mathrm{D}g)(a)$ lineáris leképezések mátrixát.
3. Számoljuk ki az $\big((\mathrm{D}f)(a)\big)(2, 1)$ és a $\big((\mathrm{D}g)(a)\big)(1, 2)$ értéket!
4. Legyen $e \in \mathbb{R}^2$ olyan egységvektor, mely párhuzamos a $(2, -7)$ vektorral. Számoljuk ki az f és g függvény e iránymenti deriváltját az a pontban.

II. Határozzuk meg, hogy mely irányhoz tartozik az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény legnagyobb iránymenti deriváltja a $a \in \mathbb{R}^2$ pontban, ha

1. $f(x, y) = \dfrac{y^3}{\mathrm{e}^{2x+1}}$ és $a = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$;
2. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ és $a = (1, 1)$.