Matematika MC, 13. hét

Fourier-sorfejtés

I. Igazoljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket.

1. $f(x) = \pi - x$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x) = \pi + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kx}{k}$

2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $\qquad \mathcal{S}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

II. Igazoljuk a $[0, 2\pi]$ intervallumon az $f(x) = x^2$ képlettel adott f függvény $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sora

$$\mathcal{S}(f)(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx,$$

valamint a Dirichlet-féle lokalizációs tétel segítségével mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

teljesül.

III. Legyen $a \in]0, \pi[$ paraméter. Az alábbi $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ függvények Fourier-sorának a segítségével

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq a. \end{cases}$ $\qquad$ 2. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad |x| < a, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq a. \end{cases}$

igazoljuk, hogy minden $a \in]0, \pi[$ paraméter esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi - a}{2} \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{a\pi - a^2}{2}$$

teljesül.
(Vegyük észre, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{k}\right)^2$ teljesül.)