Matematika MC

Andai Attila*

2020. november 30.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME 2020/21 I. félévében tartott Matematika MC előadás anyaga heti bontásban. Még kezdetleges, nyers változat, melyben előfordulhatnak hibák. Ha hibát talál, kérem szóljon a szerzőnek.

2020. október 10.
Andai Attila

1. Valós számok elemei műveletei

Jelölés. Matematikai állításokkal kapcsolatos logikában is használt jelölések. A változójelekre tetszőleges betűt, illetve jelet fogunk használni a továbbiakban. Adott p és q állítás esetén az alábbi alapvető logikai kapcsolókat értelmezzük:

$\neg p$:	p *tagadása*, *negációja*;
$p \vee q$:	p *vagy* q;
$p \wedge q$:	p *és* q;
$p \to q$:	p allításból következik q;
$\exists$:	*létezik* szimbólum;
$\forall$:	*minden* szimbólum.

Jelölés. Az alábbi jelöléseket fogjuk még használni:

$\mathbb{N}$:	természetes számok halmaza;
$\mathbb{Z}$:	egész számok halmaza;
$\mathbb{Q}$:	racionális számok halmaza;
$\mathbb{R}$:	valós számok halmaza;
$f : A \to B$:	f függvény, az A halmaz elemeihez B halmazbeli elemeket rendel;
$\operatorname{Dom} f$:	f függvény értelmezési tartománya;
$\operatorname{Ran} f$:	f függvény értékkészlete.

Kiegészítés. Létezik olyan $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$ nyolcas, ahol

1. $0, 1 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 1$;
2. $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ függvény, $- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ függvény a

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a + 0 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} & a + (-a) = 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) + c = a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a + b = b + a \end{array}$$

   tulajdonságokkal;
3. $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ függvény, $^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^{-1}$ függvény a

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \cdot 1 = a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & a \cdot a^{-1} = 1 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \cdot b = b \cdot a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array}$$

   tulajdonságokkal;
4. $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ részhalmaz, melyre minden $(a, b) \in \leq$ esetén az $a \leq b$ jelölést használjuk, és mely rendelkezik a

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} & a \leq a \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ b \leq a) \ \to \ a = b \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ b \leq c) \ \to \ a \leq c \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & a \leq b \ \vee \ b \leq a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b) \ \to \ a + c \leq b + c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \leq b \ \wedge \ 0 \leq c) \ \to \ a \cdot c \leq b \cdot c \end{array}$$

   tulajdonságokkal;
5. továbbá

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} : \ ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : \ a \leq K)) \ \to$$

$$\to \ (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : \ a \le s) \ \wedge \ (\forall s' \in \mathbb{R} : \ ((\forall a \in A : \ a \le s') \ \to \ s \le s')))))$$

teljesül.

$\diamondsuit$

Kiegészítés. Bármely két teljesen rendezett test izomorf. Vagyis ha $(\mathbf{K}, \oplus, \ominus, \times, {}^{\ominus 1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$ teljesen rendezett test, akkor létezik olyan $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbf{K}$ bijekció, melyre $\varphi(0) = \mathbf{0}$, $\varphi(1) = \mathbf{1}$ és minden $x, y \in \mathbb{R}$ elem esetén

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y) \\ \varphi(-x) &= \ominus\varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \\ x \neq 0 \ &\Rightarrow \ \varphi(x) \neq \mathbf{0} \ \wedge \ \varphi\left(x^{-1}\right) = (\varphi(x))^{\ominus 1} \\ x \le y \ &\Leftrightarrow \ \varphi(x) \preceq \varphi(y) \end{aligned}$$

teljesül.

$\diamondsuit$

Jelölés. A szorzás $\cdot$ jelét általában nem írjuk ki, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ esetén ab jelöli az $a \cdot b$ elemet. Adott $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a - b$ jelöli az $a + (-b)$ elemet. Az $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén az ab^{-1} elemre gyakran az $a : b$ vagy az $\dfrac{a}{b}$ jelölést használjuk. Továbbá minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a < b$ vagy $b > a$ azt jelöli, hogy $a \le b$ és $a \neq b$.

1.1. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$.
- Az A halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $C \in \mathbb{R}$ elemet, amelyre $\forall a \in A \ a \le C$ $(C \le a)$ teljesül.
- Az A halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az A halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az A halmaz *korlátos*, ha A felülről és alulról is korlátos.
- Az A halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük A minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az A halmaznak.
- Az A halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az A halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup A$ (illetve $\inf A$).

Kiegészítés. A valós számok fenti axiómából már levezethetők azok a tulajdonságok, melyeket már megszoktunk.

1.1. Tétel. *A valós számok halmazán az alábbiak teljesülnek.*

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad (-1) \cdot x = -x$
3. $\nexists x \in \mathbb{R} : \quad 0 \cdot x = 1$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x < y \ \to -y < -x$
5. $(-1)^2 = 1$
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad (x < y \ \wedge \ z < 0) \ \to \ yz < xz$
7. $\forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 \le x^2$
8. $0 < 1$
9. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad 0 < x < y \ \to 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$

Bizonyítás.
1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $0 + 0 = 0$ és a disztributivitás miatt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

amihez hozzáadva a $-(0 \cdot x)$ elemet $0 \cdot x = 0$ adódik.
2. Ha $x \in \mathbb{R}$ akkor az 1. pont alapján $0 \cdot x = 0$, ezért

$$\begin{aligned}(-1) \cdot x = 0 + (-1) \cdot x = -x + x + (-1) \cdot x = -x + 1 \cdot x + (-1) \cdot x = \\ = -x + (1 + (-1))x = -x + 0 \cdot x = -x + 0 = -x.\end{aligned}$$

3. Az 1. pont nyilvánvaló következménye.
4. Ha $x, y \in \mathbb{R}$ és $x < y$, akkor az egyenlőtlenséghez hozzáadva a $-x - y$ számot $-y < -x$ adódik.
5. A

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = (1 + (-1) + (-1)) \cdot (-1) = -1 + (-1)^2 + (-1)^2$$

egyenlet elejéhez és végéhez hozzáadva a $-(-1)^2$ számot

$$0 = -1 + (-1)^2,$$

majd az 1 számot

$$1 = (-1)^2$$

adódik.
6. Legyen $x, y, z \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $x < y$ és $z < 0$ teljesül. A 4. pont alapján ekkor $0 < -z$, vagyis $-zx < -zy$, amiből megint a 4. pont alapján $zy < zx$ következik.
7. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Ha $0 \leq x \in \mathbb{R}$, akkor az egyenlőtlenséget megszorozva az x pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik. Ha $x \leq 0$, akkor $0 \leq -x$, amit megszorozva a $-x$ pozitív számmal $0 \leq x^2$ adódik.
8. A 7. pont alapján nyilvánvaló.
9. Legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $0 < x$ teljesül. Ha $\frac{1}{x} \leq 0$ teljesülne, akkor ezt megszorozva az x számmal $1 \leq 0$ ellentmondás adódna, tehát $0 < \frac{1}{x}$. Ha $x, y \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $0 < x < y$ teljesül, akkor az $x < y$ egyenlőtlenséget megszorozva az $\frac{1}{xy}$ számmal $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ adódik.

$\diamondsuit$

1.2. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$\begin{aligned}
[x, y] &= \{z \in \mathbb{R} |\ x \leq z \leq y\} \\
]x, y] &= \{z \in \mathbb{R} |\ x < z \leq y\} \\
[x, y[&= \{z \in \mathbb{R} |\ x \leq z < y\} \\
]x, y[&= \{z \in \mathbb{R} |\ x < z < y\} \\
[x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} |\ x \leq z\} \\
]x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} |\ x < z\} \\
]-\infty, x] &= \{z \in \mathbb{R} |\ z \leq x\} \\
]-\infty, x[&= \{z \in \mathbb{R} |\ z < x\}
\end{aligned}$$

Továbbá bevezetjük még az

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

1.3. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{R}$ pontra a

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} |\ |x - y| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

1.2. Tétel. *Minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén $B_r(x) =]x - r, x + r[$.*

1.4. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz

– *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
– *zárt*, ha $\mathbb{R} \setminus X$ nyílt;
– *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

1.3. Tétel. *Minden $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén a $]x, y[$ halmaz nyílt.*

1.4. Tétel. *Adott $p, q \in \mathbb{R}$ esetén az*

1. $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek létezik megoldása, ha $p^2 - 4q \geq 0$, és a megoldás

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

2. $x^2 + px + q > 0$ egyenlőtlenségnek létezik megoldása, ha $p^2 - 4q < 0$, akkor $x \in \mathbb{R}$ a megoldás; ha $p^2 - 4q \geq 0$, akkor $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\right)\right[\cup \left]\frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\right), \infty\right[$ a megoldás.

Kompetencia. Elemi törtes és zárójeles átalakítások. Első és másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Elemi abszolútértékes feladatok megoldása.

$\diamondsuit$

2. Exponenciális, logaritmus, trigonometria

2.1. Tétel. *Minden $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ paraméter esetén létezik egyetlen*

$$q^{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad x \mapsto q^x$$

folytonos, egy-egy értelmű függvény, melyre az alábbiak teljesülnek.

1. $q^1 = q$
2. $q^0 = 1$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} :\ q^{a+b} = q^a \cdot q^b$
4. $\forall a \in \mathbb{R} :\ q^{-a} = (q^a)^{-1}$

Minden $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ paraméter esetén $\log_q$ jelöli a $q^{\cdot}$ függvény inverzét, melyet q alapú logaritmusnak nevezünk. Vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\log_q(q^x) = x$ és minden $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $q^{\log_q y} = y$ teljesül. A logaritmus függvényre az alábbiak teljesülnek.

1. $\log_q q = 1$
2. $\log_q 1 = 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ :\ \log_q(xy) = \log_q x + \log_q y$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+ :\ \log_q x^{-1} = -\log_q x$

2.1. Definíció. Minden $x \in \mathbb{R}$ szám esetén bevezetjük az x° jelölést az $x^\circ = x \cdot \frac{\pi}{180}$, melyet x *foknak* mondunk.

2.2. Definíció. Adott $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R}^2$ síkon az origóból induló, egységnyi hosszúságú, az első tengellyel $\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \cdot 180^\circ$ fokos szöget bezáró vektor végpontjának a koordinátáját jelölje $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Adott $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén, ha $\cos\varphi \neq 0$, akkor legyen $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

2.2. Tétel. *(Elemi függvények alaptulajdonságai.)*

– *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

– *A $\frac{\pi}{2}$ és a π szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \sin\pi = 0$$

– *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & \sin(x+\pi) &= -\sin x & \sin(x+2\pi) &= \sin x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos(x+\pi) &= -\cos x & \cos(x+2\pi) &= \cos x \end{aligned}$$

– *A $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ és a $\frac{\pi}{3}$ szögfüggvényei.*

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

– *Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

2.3. Tétel. *Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.*

1. *A* $\cos$ *függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$ intervallumon és*

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \cos x$$

bijekció.

2. *A* $\sin$ *függvény szigorúan monoton növő a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon és*

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] \qquad x \mapsto \sin x$$

bijekció.

3. *A* tg *függvény értelmezési tartománya a $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ halmaz, valamint szigorúan monoton növő a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon és*

$$\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \operatorname{tg} x$$

bijekció.

2.3. Definíció. *Elemi függvények inverzei.*

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét *arkusz szinusz függvénynek* nevezzük, jele arcsin, vagyis
$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$
2. A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény inverzét *arkusz koszinusz függvénynek* nevezzük, jele arccos, vagyis
$$\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$
3. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét *arkusz tangens függvénynek* nevezzük, jele arctg, vagyis
$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}.$$

2.4. Tétel. *Legyen $q \in [-1, 1]$.*
- *A $\sin x = q$ egyenlet megoldása $x_1 = 2k\pi + \arcsin x$ és $x_2 = 2l\pi + \pi - \arcsin x$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.*
- *A $\cos x = q$ egyenlet megoldása $x_{1,2} = 2k\pi \pm \arccos x$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.*
- *A $\operatorname{tg} x = q$ egyenlet megoldása $x = k\pi + \operatorname{arctg} x$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.*

Kompetencia. Hatványozás és logaritmus elemi azonosságai. Egyszerű exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. Elemi trigonometrikus feladatok megoldása.

$\Diamond$

3. Sorozatok és határértékük

3.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat értékeire az $a_n = a(n)$ jelölést használjuk.

3.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)
- Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}$ szám az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke*, ha
$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha
$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to \varepsilon < a_n).$$
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha
$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to -\varepsilon > a_n).$$
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

3.1. Tétel. *Ha $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke, akkor $x = y$.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $x \neq y$. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < \frac{|x-y|}{2}$ és $|a_n - y| < \frac{|x-y|}{2}$. Amiből az

$$|x - y| = |x - a_n + a_n - y| \leq |x - a_n| + |a_n - y| < |x - y|$$

ellentmondás adódik.
Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y = \infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n > x + 1$, ami ellentmondás. Valamint hasonlóan, ha $x \in \mathbb{R}$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - x| < 1$ és $a_n < x - 1$, ami ellentmondás. Végül ha $x = \infty$ és $y = -\infty$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n < 0$ és $a_n > 0$, ami ellentmondás.

3.3. Definíció. (*A* lim *művelet.*)
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

3.2. Tétel. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

3.3. Tétel. *Ha* $q \in]-1, 1[$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

3.4. Definíció.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *korlátos*, ha $\operatorname{Ran} a$ korlátos halmaz.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

3.4. Tétel. *Minden monoton, korlátos sorozat konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ monoton növő korlátos sorozat, és legyen $A = \sup \operatorname{Ran} a$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az $A - \varepsilon < A$ egyenlőtlenség miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $A - \varepsilon < a_N$. Mivel az a sorozat monoton növő, így minden $n > N$ természetes számra $A - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq A < A + \varepsilon$ teljesül, vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$, tehát $\lim a = \sup \operatorname{Ran} a$. Monoton csökkenő sorozatra teljesen hasonló a bizonyítás.

3.5. Tétel. *Legyen* $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *konvergens sorozat, és* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- *Az* $a + b$ *sorozat konvergens és* $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
- *A* λa *sorozat konvergens és* $\lim(\lambda a) = \lambda(\lim a)$.
- *Az* ab *sorozat konvergens és* $\lim ab = (\lim a)(\lim b)$.
- *Az* $|a|$ *sorozat konvergens és* $\lim |a| = |\lim a|$.
- *Ha minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \neq 0$ *és* $\lim a \neq 0$, *akkor az* $\frac{1}{a}$ *sorozat konvergens és* $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$.

3.6. Tétel. *(Rendőr-elv.)* *Legyen* $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *olyan sorozat, melyre minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $a_n \leq b_n \leq c_n$, *és* $\lim a = \lim c = x$ *teljesül. Ekkor* b *konvergens, és* $\lim b = x$.

Kompetencia. Egyszerűbb sorozatok határértékének bizonyítása definícióval. Sorozatok határértékének meghatározása rendőr-elvvel.

◊

4. Sorok

4.1. Definíció. (*Sorok.*)

- Adott $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük, és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim \sum a$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Ha $\lim \sum a = \pm\infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

4.1. Tétel. *Legyen $\sum a, \sum b$ konvergens sor, és $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *A $\sum(a+b)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*
- *A $\sum(\lambda a)$ sor konvergens és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

4.2. Tétel. *A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.*

Bizonyítás. 1. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

teljesül. Ebből pedig következik a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergenciája.

2. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

teljesül. Ezek alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor felülről korlátos és monoton növő, tehát konvergens. Sőt még a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$$

becslés is adódik.

4.3. Tétel. *Ha $q \in \,]-1,1[$, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Bizonyítás. Ha $|q| < 1$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

teljesül, valamint a 3.3 tétel alapján $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Ezekből az $n \to \infty$ határátmenet után

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

adódik.

4.4. Tétel. *(Majoráns és minoráns kritérium.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozathoz rendelt $\sum a$ sort.*

1. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq b_n$, és a $\sum b$ sor konvergens, akkor a $\sum a$ sor is konvergens, továbbá $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*
2. *Ha létezik olyan $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq b_n$, és a $\sum b$ sor divergens, akkor a $\sum a$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ és $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
1. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \leq \beta_n$. Mivel a β sorozat konvergens, ezért korlátos is. Az α sorozat korlátos az $\alpha_n \leq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt, továbbá monoton növő az α sorozat a konstrukciója miatt. Ezek alapján az α sorozat konvergens.
2. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $\alpha_n \geq \beta_n$. Mivel a β sorozat divergens, és monoton növő, ezért $\lim \beta = \infty$. Az $\alpha_n \geq \beta_n$ egyenlőtlenség miatt $\lim \alpha = \infty$, vagyis az α sorozat divergens.

4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

4.5. Tétel. *Ha a $\sum a$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is, és*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \,.$$

Kiegészítés. Sorok segítségével definiálhatók precízen a szögfüggvények.

4.3. Definíció. (*Elemi függvények.*)

– Az *exponenciális függvény*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

– A *szinusz függvény*

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz függvény*

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens függvény*

$$\mathrm{tg}: \{z \in \mathbb{R} |\ \cos z \neq 0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Ennek a segítségével igazolható, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{e}^x = \exp x$ teljesül.

◊

Kompetencia. Geometriaira visszavezethető, illetve teleszkópikus sorok összegének meghatározása.

◊

5. Függvények határértéke és folytonossága

5.1. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az *a pont az A halmaz torlódási pontja*, ha minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $x \in A$, melyre $0 < |x - a|$ <r teljesül.

5.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \ (0 < |x - a| < \delta \ \to \ |f(x) - A| < \varepsilon)$$

5.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaznak.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban végtelen*, ha

$$\forall K \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \ \big(0 < |x - a| < \delta \to K < f(x)\big).$$

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

5.4. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *végtelen torlódási pontja*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A \ (\varepsilon < x).$$

Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *mínusz végtelen torlódási pontja*, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

5.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az *f függvény határértéke a végtelenben*,

– $A \in \mathbb{R}$, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \ \big(\delta < x \to |f(x) - A| \leq \varepsilon\big).$$

– *végtelen*, ha
$$\forall K \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f : \ \big(\delta < x \to K < f(x)\big).$$

– *mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

5.6. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

– Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, és legyen $a \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{Dom}\, f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

– Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

5.1. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$ torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$ halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_{a} f$ és $\lim\limits_{a} g$, valamint $\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{a} g \notin \{\infty, -\infty\}$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.*

$$\begin{array}{ll} 1. & \lim\limits_{a}(f+g) = \lim\limits_{a} f + \lim\limits_{a} g \\ 2. & \lim\limits_{a}(\lambda f) = \lambda(\lim\limits_{a} f) \\ 3. & \lim\limits_{a}(fg) = \left(\lim\limits_{a} f\right)\left(\lim\limits_{a} g\right) \\ 4. & \lim\limits_{a} |f| = \left|\lim\limits_{a} f\right| \end{array}$$

Továbbá, ha $0 \notin \operatorname{Ran} f$ és $\lim\limits_{a} f \neq 0$, akkor

$$\lim_{a} \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim\limits_{a} f}.$$

5.2. Tétel. *(Rendőr-elv függvények határértékére.) Ha az $f, g, h : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvényre $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \operatorname{Dom} h$ és minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ teljesül, valamint az $a \in \mathbb{R}$ pont torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és valamely $A \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} h = A$ teljesül, akkor létezik a $\lim\limits_{a} g$ határérték és $\lim\limits_{a} g = A$.*

5.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.

– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+} \exists \delta \in \mathbb{R}^{+} \forall x \in \operatorname{Dom} f : \ \Big(|x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

5.3. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$, $c \in \mathbb{R}$. Ha az f és g függvény folytonos az a pontban, akkor az*

$$f + g, fg, cf, |f|, f \circ g$$

függvények is folytonosak az a pontban, valamint ha $f(a) \neq 0$, akkor az $\dfrac{1}{f}$ függvény is folytonos az a pontban.

5.4. Tétel. *Az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ és $g(x) = x$ függvények folytonosak, továbbá minden polinom folytonos.*

5.5. Tétel. *A* sin, cos, tg, arcsin, arccos *és* arctg *függvény folytonos. Továbbá, minden $q \in \mathbb{R}^{+} \setminus \{1\}$ esetén a $q^{\cdot}$ és a $\log_q$ függvény folytonos.*

5.6. Tétel. *(Bolzano-tétel.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, melyre $f(a)f(b) < 0$. Ekkor létezik $c \in]a, b[$, melyre $f(c) = 0$.*

5.7. Tétel. *(Weierstrass tétele.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $x_1, x_2 \in [a, b] \to \mathbb{R}$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

teljesül.

Kompetencia. Egyszerűbb függvények adott pontbeli határértékének és folytonosságának igazolása definícióval.

◊

6. Függvények deriválása

6.1. Deriválás fogalma és alaptulajdonságai

6.1. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az *a pont az A halmaz belső pontja*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $]a-r, a+r[\subseteq A$ teljesül. Az A halmaz belső pontjainak a halmazát $\operatorname{Int} A$ jelöli.

6.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$.

- Azt mondjuk, hogy az *f függvény differenciálható*, vagy *deriválható az a pontban* ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$
teljesül. Ezt az A számot az *f függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a
$$f' : \left\{ a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \mid \exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
függvényt.
- Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.
- Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Jelölés. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváltjára használjuk még a $\frac{\mathrm{d} f(x)}{\mathrm{d} x}$ jelölést is.

6.1. Tétel. *(A differenciálhatóság általános jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Az f függvény pontosan akkor differenciálható az a pontban, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0.$$
Ha az f függvény differenciálható az a pontban akkor a fenti határértékben szereplő c konstansra $f'(a) = c$ teljesül.

6.2. Tétel. *Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.*

6.3. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int} \operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

- *$f + g$ differenciálható az a pontban, és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;*
- *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban, és $(cf)'(a) = cf'(a)$;*
- *fg differenciálható az a pontban, és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;*
- *ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható az a pontban, és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.*

6.4. Tétel. *(Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha g differenciálható az a pontban és f differenciálható a $g(a)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az a pontban, és*
$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

6.5. Tétel. *(Elemi szögfüggvények deriváltja.) Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$ *és* $\operatorname{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Kiegészítés. Továbbá a fenti függvények inverzére az alábbiak teljesülnek.

1.	$\log_q' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x \ln q}$
2.	$\arcsin' :]-1,1[\to \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3.	$\arccos' :]-1,1[\to \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$\operatorname{arctg}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

$\Diamond$

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Dom} f'$. Az *$f$ függvény a pontbeli érintőjének* az egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Kompetencia. Egyszerűbb függvények deriváltjának meghatározása deriválttáblázat segítségével és az érintőegyenes egyenletének felírása.

$\Diamond$

6.2. A derivált kapcsolata a függvénnyel

6.6. Tétel. *(Rolle-tétel.) Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, mely differenciálható az* $]a,b[$ *intervallumon, és melyre* $f(a) = f(b)$. *Ekkor létezik olyan* $\xi \in]a,b[$, *hogy*

$$f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. A 5.7 Weierstrass-tétel értelmében az f függvény valamely $\alpha, \beta \in [a,b]$ pontokban felveszi a minimumát és maximumát. Ha $\{\alpha, \beta\} = \{a, b\}$, akkor az f függvény állandó, vagyis minden $\xi \in]a,b[$ pontban $f'(\xi) = 0$ teljesül.
Tegyük fel, hogy az f függvény a minimumát az α pontban veszi fel, melyre $\alpha \in]a,b[$ teljesül. Mivel az f függvény differenciálható az α pontban, ezért

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \begin{cases} = \displaystyle\lim_{x \to \alpha+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0; \\ = \displaystyle\lim_{x \to \alpha-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0, \end{cases}$$

ahol felhasználtuk, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \geq f(\alpha)$. A fenti egyenlőtlenségekből $f'(\alpha) = 0$ adódik.
Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy $f'(\beta) = 0$, ha azt tesszük fel, hogy az f függvény a maximumát a β pontban veszi fel, melyre $\beta \in]a,b[$ teljesül.

6.7. Tétel. *(Lagrange-tétel.) Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény, mely differenciálható az* $]a,b[$ *intervallumon. Ekkor létezik olyan* $c \in]a,b[$, *hogy*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Bizonyítás. Rolle-tételt kell alkalmazni a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x)$$

függvényre.

6.8. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

1. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f állandó az I intervallumon.*
2. *Az f függvény pontosan akkor monoton növő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$.*
3. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f szigorúan monoton növő az I intervallumon.*
4. *Az f függvény pontosan akkor monoton csökkenő az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) \leq 0$.*
5. *Ha minden $x \in I$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$ olyan, hogy $a < b$. A Lagrange-tétel értelmében létezik $c \in]a,b[$, melyre

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

teljesül. Ebből egyszerűen kapjuk az állításokat.
1. Ha $f' = 0$, akkor $f(b) - f(a) = 0$.
2. Ha f monoton növő és $c \in I$, akkor az f függvény differenciálhatósága miatt

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0.$$

Ha $f' \geq 0$, akkor $f(b) - f(a) \geq 0$, vagyis f monoton növő.
3. Ha $f' > 0$, akkor $f(b) - f(a) > 0$, vagyis f szigorúan monoton növő.
A 4. és 5. pont a fentiekhez hasonlóan igazolható.

6.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)} = f$, és minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)} = (f^{(i-1)})'$.

- Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. Az *f függvény n-szer differenciálható az a pontban*, ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül.
- Az *f függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$.
- Az *f függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$ teljesül. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R})$ jelöli.
- Az *f függvény n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható*, ha f n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű n-szer ($n \in \mathbb{N}^+$) folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

Kompetencia. Függvény monotonitásának vizsgálata a függvény deriváltjával.

$\diamondsuit$

6.3. Taylor-sorfejtés

6.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és $a \in \operatorname{Dom} f$, akkor az *$f$ függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T_a^f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hatványsort.

6.9. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f^{(n)}$, és legyen P_n olyan n-ed fokú polinom, hogy minden $k \in \{0,\dots,n\}$ esetén $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ teljesül. Ekkor $P_n = T^f_{n,a}$.*

6.10. Tétel. *(Taylor-formula.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$, és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a,b] \subseteq \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény $(n+1)$-szer differenciálható az $[a,b]$ halmazon. Ekkor létezik olyan $\xi \in \,]a,b[$, melyre*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

6.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

6.11. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < n$ esetén $f^{(i)}(a) = 0$, valamint $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

1. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az a pontban, ha n páros, és $f^{(n)}(a) < 0$.*
2. *Az f függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az a pontban, ha n páros, és $f^{(n)}(a) > 0$.*
3. *Ha n páratlan, akkor az f függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az a pontban.*

Kompetencia. Függvény adott pontbeli és adott rendű Taylor-polinomjának a felírása, valamint egyszerűbb esetekben a függvényérték és a Taylor-polinom értéke közötti eltérés felső becslése. Függvény lokális szélsőértékének vizsgálata az első három derivált tulajdonságai alapján.

$\lozenge$

7. Határozott integrál

7.1. Definíció. Az $[a,b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ szám n-est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$, és minden $0 \leq i \leq n-1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a,b]}$ jelöli.

7.2. Definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ egy felosztás. Ekkor az *f függvény $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege*

$$s_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát.*

$$s(f) = \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} | \ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$
$$S(f) = \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} | \ x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$

7.3. Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

- *Riemann-integrálható*, ha $\sup s(f) = \inf S(f)$, ekkor $\int\limits_a^b f$ vagy $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ jelöli az $\sup s(f)$ vagy az $\inf S(f)$ értéket. Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis
$$\mathcal{R}([a,b], \mathbb{R}) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} | \ f \text{ Riemann-integrálható} \}.$$
- Ha $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, akkor bevezetjük a $\int\limits_b^a f = -\int\limits_a^b f$ jelölést.
- Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra, és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén legyenb $\int\limits_a^a f = 0$.
- Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az *f függvény határozott integráljának* nevezzük.

7.1. Tétel. *Az $[a,b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények integrálhatók, azaz $C([a,b]\,\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ teljesül. Továbbá, ha egy $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvény csak véges sok pontban nem folytonos, akkor szintén integrálható.*

7.2. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f+g, cf, fg \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$, valamint*

1. $\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g)$;
2. $\int_a^b (cf) = c \int_a^b f$;
3. *ha* $f \leq g$, *akkor* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;
4. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

7.3. Tétel. *(Newton–Leibniz-tétel.)* *Legyen $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ és $F \in C([a,b], \mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a,b[$ intervallumon, és itt $F' = f$. Ekkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

7.4. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f.$$

7.4. Tétel. *Ha $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, akkor minden $x \in]a,b[$ pontban I_f differenciálható és $I_f'(x) = f(x)$.*

7.5. Definíció. (*Improprius integrál.*)

- Legyen $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a, \infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x], \mathbb{R})$ teljesül. Ha a $\lim\limits_{x\to\infty} \int_a^x f$ határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az $[a, \infty[$ intervallumon*, és erre a
$$\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$
jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az *f függvény improprius integrálja divergens az $[a, \infty[$ intervallumon.*
- Ha $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty, a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,a], \mathbb{R})$ teljesül, és a $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a f$ határérték létezik, és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja a $]-\infty, a]$ intervallumon*, és erre a
$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$
jelölést használjuk.
- Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy létezik a $\int_{-\infty}^0 f$ és a $\int_0^\infty f$ improprius integrál, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az $\mathbb{R}$ halmazon*, és erre a
$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f$$
jelölést használjuk.

Kompetencia. Adott felosztáshoz és függvényhez tartozó közelítő összeg felírása, egyszerűbb határozott és improprius integrálok kiszámítása.

$\lozenge$

8. Euklidészi tér és lineáris leképezések

8.1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $x, y \in \mathbb{R}^n$. Definiáljuk az összeadást, minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a számmal való szorzást és a skaláris szorzást az alábbi módon.

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \\ \langle x, y \rangle &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{aligned}$$

8.1. Tétel. *(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorra*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \le \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

8.2. Definíció. Egy $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt normának hívunk, ha
- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \ge 0$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = 0 \ \leftrightarrow \ x = 0$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n : \ \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

8.2. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. Az $\mathbb{R}^n$ téren a*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad & x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \qquad & x \mapsto \|x\|_\infty = \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

leképezések normák (melyet p-normának illetve sup*-normának vagy maximum-normának nevezünk).*

8.3. Tétel. *Minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

8.3. Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vektorok által bezárt szög

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

8.4. Definíció. Egy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezést *lineáris leképezésnek* nevezünk, ha
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \ A(x + y) = A(x) + A(y)$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n : \ A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Jelölés. Ha $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineráris leképezés és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor az $Ax = A(x)$ rövidítést használjuk.

8.4. Tétel. *Ha $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, akkor létezik egyértelműen valós számoknak olyan $[A] = (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ rendszere, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra és $i = 1, \dots, m$ indexre*

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

teljesül. Az $[A]$ az A lineáris leképezés mátrixa.

Jelölés. A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az $A = (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$ mátrix elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

módon szokás leírni.

8.5. Definíció. Ha $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az alábbi módon definiáljuk lineáris leképezések összegét, számszorosát és kompozícióját.

$$\begin{aligned} A + B :&\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto Ax + Bx \\ \lambda A :&\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad x \mapsto \lambda Ax \\ CA :&\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \qquad x \mapsto CAx \end{aligned}$$

8.5. Tétel. *Ha $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $A + B$, λA és CA is lineáris leképezés, valamint ezek mátrixára*

1. $\forall i \in \{1, \dots, m\}\, \forall j \in \{1, \dots, n\} : \ (A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$;
2. $\forall i \in \{1, \dots, m\}\, \forall j \in \{1, \dots, n\} : \ (\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}$;
3. $\forall i \in \{1, \dots, k\}\, \forall j \in \{1, \dots, n\} : \ (CA)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} C_{il} A_{lj}$

teljesül.

8.6. Definíció. Ha $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, akkor a $\lambda \in \mathbb{R}$ számot az *A leképezés sajátértékének* nevezünk, ha létezik olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ vektor, hogy $Av = \lambda v$ teljesül, továbbá ebben az esetben a v vektort a *λ sajátértékhez tartozó sajátvektonak* hívjuk.

8.7. Definíció. Az A $n \times n$-es mátrix *szimmetrikus*, ha minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$ esetén $A_{ij} = A_{ji}$ teljesül.

8.6. Tétel. *Ha A $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, akkor létezik $\mathbb{R}^n$ vektoroknak olyan $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ rendszere és valós számoknak olyan $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ rendszere, hogy minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $i \neq j$ esetén $Av_i = \lambda_i v_i$, $\|v_i\|_2 = 1$ és $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.*

Kompetencia. Elemi műveletek n komponensű vektorokkal és $n \times n$ méretű mátrixokkal. Adott sajátértékhez tartozó sajátvektor meghatározása.

$\diamond$

9. Többváltozós analízis

9.1. Határérték és folytonosság

9.1. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{R}^n$ pontra a

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \ \|x - y\|_2 < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

9.2. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz
- *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
- *zárt*, ha $\mathbb{R}^n \setminus X$ nyílt;
- *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}^n$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

9.3. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ függvényeket ***vektor értékű sorozatoknak*** nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat értékeire az $a_n = a(n)$ jelölést használjuk.

9.4. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)
- Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}^n$ szám az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat ***határértéke***, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat ***konvergens***, ha létezik határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat ***divergens***, ha nem konvergens.

Jelölés. (*A* lim *művelet.*) Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.

A vektorértékű sorozatok határértékére szintén teljesülnek a 3.5 állításban megfogalmazott tulajdonságok. Továbbá vektor értékű sorozatokhoz a 4.1 defincióhoz hasonlóan rendelhetünk vektor értékű sort, melynek hasonlóan értelmezhetjük konvergenciáját, valamint ezekre a sorokra teljesülnek a 4.1 tételben megfogalmazott tulajdonságok.

9.5. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és $a \in \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy az ***a pont az A halmaz torlódási pontja***, ha minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $x \in A$, melyre $0 < \|x - a\|_2 < r$ teljesül.

9.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ függvény és $a \in \mathbb{R}^n$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az ***f függvény határértéke az a pontban*** $A \in \mathbb{R}^m$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \ (0 < \|x - a\|_2 < \delta \ \to \ \|f(x) - A\|_2 < \varepsilon)$$

Jelölés. (*A* lim *művelet.*) Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvénynek az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban $A \in \mathbb{R}^m$ a határértéke, azt a $\lim\limits_a f = A$ vagy a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ szimbólummal fejezzük ki.

Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény határértékére szintén teljesülnek a 5.1 állítás 1–4. pontjában megfogalmazott tulajdonságok.

9.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}^m$ és $a \in \operatorname{Dom} f$.
- Az ***f függvény folytonos az a pontban***, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \operatorname{Dom} f : \ \Big(\|x - a\|_2 < \delta \to \|f(x) - f(a)\|_2 < \varepsilon\Big).$$

- Az ***f függvény folytonos***, ha minden $a \in \operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

9.1. Tétel. *Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \{1, \ldots, n\}$, akkor az*

$$\operatorname{pr}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$$

függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $k \in \{1, \dots, n\}$ és $a \in \mathbb{R}^n$. Megmutatjuk, hogy a pr_k függvény folytonos az a pontban. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és legyen $\delta = \varepsilon$. Ekkor ha $x \in \mathbb{R}^n$ olyan, hogy $\|x - a\|_2 < \delta$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < \delta^2,$$

amiből

$$\delta^2 > \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \geq (x_k - a_k)^2 = (\mathrm{pr}_k(x) - \mathrm{pr}_k(a))^2$$

adódik, vagyis

$$|\mathrm{pr}_k(x) - \mathrm{pr}_k(a)| < \delta.$$

Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények folytonosságára szintén teljesülnek a 5.3 állításban megfogalmazott tulajdonságok.

9.8. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és $a \in \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy az *a pont az A halmaz belső pontja*, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq A$ teljesül. Az A halmaz belső pontjainak a halmazát $\operatorname{Int} A$ jelöli.

Kompetencia. Egyszerűbb többváltozós függvény folytonosságának vizsgálata.

◊

9.2. Függvény szélsőértéke

9.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$ és $i \in \{1, \dots, n\}$. Válasszunk egy olyan $r \in \mathbb{R}^+$ paramétert, melyre $B_r^{\|\cdot\|_2}(a) \subseteq \operatorname{Dom} f$ teljesül. Ha az

$$\alpha_{a,i} :]a_i - r, a_i + r[\to \mathbb{R} \qquad t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

függvény differenciálható az a_i pontban, akkor $\alpha'_{a,i}(a_i)$ értékét az *f függvény a pontbeli i-edik változó szerinti parciális deriváltjának* nevezzük és a $(\partial_i f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

9.10. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int} \operatorname{Dom} f$. Ha létezik olyan $v \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \langle v, x - a \rangle}{\|x - a\|_2} = 0,$$

teljesül, akkor az *f függvény differenciálható az a pontban*, a v vektort az *f függvény a pontbeli gradiensének* nevezzük és a $(\operatorname{grad} f)(a)$ szimbólummal jelöljük, továbbá az *f függvény a pontbeli deriváltja*

$$(Df)(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \langle v, x \rangle .$$

9.2. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett függvény. Ha minden $i \subseteq \{1, \dots, n\}$ esetén az $\partial_i f$ függvény folytonos az U halmazon, akkor az f függvény differenciálható az U halmazon és minden $a \in U$ esetén*

$$(\operatorname{grad} f)(a) = ((\partial_1 f)(a), \dots, (\partial_n f)(a))$$

teljesül, valamint a $(\mathrm{D}f)(a)$ lineáris leképezés mátrixa

$$(\mathrm{D}f)(a) = ((\partial_1 f)(a) \dots (\partial_n f)(a)) .$$

9.3. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Int}\operatorname{Dom} g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

- *$f+g$ differenciálható az a pontban, és $(\mathrm{D}(f+g))(a) = (\mathrm{D}f)(a) + (\mathrm{D}g)(a)$;*
- *minden $c \in \mathbb{R}$ esetén cf differenciálható az a pontban, és $(\mathrm{D}(cf))(a) = c(\mathrm{D}f)(a)$;*
- *fg differenciálható az a pontban, és $(\mathrm{D}(fg))(a) = g(a)(\mathrm{D}f)(a) + f(a)(\mathrm{D}g)(a)$.*

9.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ és $v \in \mathbb{R}^n$. Ha létezik az

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

határérték, akkor ezt a határértéket *az f függvény a pontbeli v iránymenti deriváltjának* nevezzük és a $(\mathrm{D}_v f)(a)$ szimbólummal jelöljük.

9.4. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$ olyan pont, melyben f differenciálható. Ekkor minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra*

$$(\mathrm{D}_v f)(a) = \langle (\operatorname{grad} f)(a), v \rangle$$

teljesül.

9.12. Definíció. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor az *f függvény (x_0, y_0) pontbeli érintősíkjának* nevezzük a

$$z = (\partial_1 f)(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + (\partial_2 f)(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

síkot.

9.13. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$.

- Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
- Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
- Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$.
- Az *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

9.5. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}^n$ olyan pont, melyben az f függvény differenciálható. Ha az f függvénynek szélsőértéke van az a pontban, akkor $(\operatorname{grad} f)(a) = 0$.*

9.6. Tétel. *(Többváltozós függvény lokális szélsőértékének differenciális jellemzése.) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett függvény. Tegyük fel, hogy minden $i, j \subseteq \{1, \ldots, n\}$ esetén az $\partial_j \partial_i f$ függvény folytonos az U halmazon. Minden $x \in U$ esetén legyen $A(x)$ az az $n \times n$-es mátrix, melynek $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ indexű eleme $A(x)_{ij} = (\partial_i \partial_j f)(x)$. Ekkor minden $x \in U$ esetén az $A(x)$ mátrix szimmetrikus. Továbbá, ha valamely $x \in U$ esetén $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$ és az $A(x)$ mátrix*

- *mindegyik sajátértéke nullánál nagyobb, akkor az f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban;*

- *mindegyik sajátértéke nullánál kisebb, akkor az f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban;*
- *rendelkezik nullánál nagyobb és nullánál kisebb sajátértékkel is, akkor az f függvénynek nincs szélsőértéke az a pontban. (Ebben az esetben az a pontot* nyeregpontnak *nevezzük.)*

Kompetencia. Többváltozós függvény parciális deriválása. Gradiens vektor és iránymenti derivált meghatározása. Többváltozós függvény lokális szélsőértékének vizsgálata a függvény második deriváltja alapján.

◊

10. Fourier-sorfejtés

10.1. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ teljesül, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}\,t \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\,t \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$$

számokat. Az *f függvény $x \in \mathbb{R}$ pontbeli Fourier-sorának* nevezzük a

$$S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor *$n-$edik részletösszeg-függvényének* nevezzük az

$$S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

függvényt.

10.1. Tétel. *Legyen $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melynek a második deriváltja is folytonos, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje S_n az f függvény Fourier-sorának n-edik részletösszegét. Ekkor*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \cap]N,\infty[\, \forall x \in \mathbb{R} : \; |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

10.2. Tétel. *(Dirichlet-féle lokalizációs tétel.) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan 2π szerint periodikus függvény, melyre $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathcal{R}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ teljesül. Továbbá legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, melyre létezik az*

$$F_+ = \lim_{t\to x_0} f|_{]x_0,\infty[}(t) \qquad F_- = \lim_{t\to x_0} f|_{]-\infty,x_0[}$$

határérték, továbbá az

$$\alpha :]x_0,\infty[\qquad t \mapsto \frac{f(x_0+t) - F_+}{t}$$
$$\beta :]-\infty,x_0[\qquad t \mapsto \frac{f(x_0+t) - F_-}{t}$$

függvényeknek is létezik a határértékük a 0 pontban. Ekkor az f függvény Fourier-sor konvergens az x_0 pontban és $S(x) = \dfrac{F_+ + F_-}{2}$ teljesül.

Kompetencia. Egyszerű 2π szerint periodikus függvény Fourier-együtthatóinak meghatározása.

◊