Matematika A3 villamosmérnököknek
3. gyakorlat

Laplace-transzformáció

I. Vezessük be az alábbi jelölést, ahol $a \in \mathbb{R}^+$ paraméter

$$C_{\mathrm{L}}(a) = \left(f : [0, \infty[\to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ szakaszonként folytonos és} \\ \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \le M\,\mathrm{e}^{ax} \end{array} \right).$$

Az $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ függvény *Laplace-transzformáltja*

$$\mathcal{L}(f) :]a, \infty[\to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-px}\,\mathrm{d}\,x.$$

Egy $a \in \mathbb{R}$ paraméter esetén jelölje a^+ az a pozitív részét, azaz $a^+ = 0$ ha $a \le 0$, valamint $a^+ = a$ ha $a > 0$. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények a megadott függvényosztályba tartoznak, valamint teljesülnek a Laplace-transzformáltjukra vonatkozó egyenlőségek. A függvényeknél $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ paraméterek.

1.	$f(x) = x^n$	$\forall a > 0 : f \in C_{\mathrm{L}}(a)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
2.	$f(x) = \cos(ax)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(0)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p}{p^2 + a^2}$
3.	$f(x) = \sin(ax)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(0)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{a}{p^2 + a^2}$
4.	$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$	$f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{1}{p - a}$
5.	$f(x) = \mathrm{sh}(ax)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(\lvert a \rvert)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{a}{p^2 - a^2}$
6.	$f(x) = \mathrm{ch}(ax)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(\lvert a \rvert)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p}{p^2 - a^2}$
7*.	$f(x) = \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{b}{(p-a)^2 + b^2}$
8*.	$f(x) = \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$	$f \in C_{\mathrm{L}}(a^+)$	$\mathcal{L}(f)(p) = \dfrac{p - a}{(p-a)^2 + b^2}$

II. A szakaszonként folytonos f és g függvények konvolúcióját az

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t) g(x - t)\,\mathrm{d}\,t$$

képlettel értelmezzük, amikor az integrál létezik. Ha valamilyen $f, g \in C_{\mathrm{L}}(a)$ függvények konvolúciójára $f * g \in C_{\mathrm{L}}(a)$ teljesül valamilyen $a \in \mathbb{R}^+$ paraméterrel akkor miden $p > a$ esetén

$$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \mathcal{L}(g)(p).$$

Ennek a képletnek és az I. feladatban meghatározott Laplace-transzformáltak segítségével igazoljuk, hogy az alábbi Laplace-transzformáltak a megadott függvényekhez tartoznak. (Vagyis a Laplacetranszformáltból származtassuk a függvényt.) A feladatokban $a > 0$ paraméter.

$$1.\quad \mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p^3 + ap} \qquad f(x) = \frac{1 - \cos(\sqrt{a}x)}{a}$$

$$2.\quad \mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p^3 + ap^2} \qquad f(x) = \frac{ax - 1 + e^{-ax}}{a^2}$$

$$3^*.\quad \mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{(p-a)^2} \qquad f(x) = x\, e^{ax}$$

III. Legyen $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ n-szer folytonosan differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy ekkor minden $p > a$ esetén

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0).$$

IV. Az alábbi differenciálegyenletek oldjuk meg Laplace-transzformációval, ahol $f \in C_{\mathrm{L}}(a)$ folytonosan differenciáható függvény és $A, B, C \in \mathbb{R}$ paraméterek.
1. Tekintsük az $y'' + 2y' + 2y = f$ egyenletet az $y(0) = A$ és $y'(0) = B$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \cdot \frac{1}{(p+1)^2 + 1} + A\frac{p+1}{(p+1)^2+1} + (A+B)\frac{1}{(p+1)^2+1},$$

és ennek megfelelően a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = \left(f * \frac{\sin}{\exp}\right)(x) + A\, e^{-x} \cos x + (A+B)\, e^{-x} \sin x.$$

2*. Tekintsük az $y''' - 2y'' + y' - 2y = f$ egyenletet az $y(0) = A$, $y'(0) = B$ és $y''(0) = C$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y)(p) = \quad & \mathcal{L}(f)(p) \cdot \frac{1}{(p-2)(p^2+1)} + \frac{1}{p-2} \cdot \frac{p^2}{p^2+1} + \\ & + (B - 2A)\frac{1}{p-2} \cdot \frac{p}{p^2+1} + (A - 2B + C)\frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{p^2+1},\end{aligned}$$

és ennek megfelelően a differenciálegyenlet megoldása

$$\begin{aligned}y(x) = \quad & \big(f * (\exp)^2 * \sin\big)(x) + A\, e^{2x} - A\big((\exp)^2 * \sin\big)(x) + \\ & + (B - 2A)\big((\exp)^2 * \cos\big)(x) + (A - 2B + C)\big((\exp)^2 * \sin\big)(x),\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}y(x) = \quad & \Big(\frac{(\exp)^2 - 2\sin - \cos}{5} * f\Big)(x) + \\ & + \frac{A + C}{5}\, e^{2x} + \frac{-2A + 5B - 2C}{5} \sin x + \frac{4A - C}{5} \cos x.\end{aligned}$$

3*. Tekintsük az

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - \cos t \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + \sin t$$

egyenletrendszert az $x_1(0) = A$ és $x_2(0) = B$ kezdeti feltételekkel. Igazoljuk, hogy ekkor a keresett függvények Laplace-transzformáltjai

$$\mathcal{L}(x_1)(p) = -\frac{1}{p^2+1} + 2\frac{1}{(p^2+1)^2} + A\frac{p}{p^2+1} + B\frac{1}{p^2+1}$$
$$\mathcal{L}(x_2)(p) = 2\frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} + B\frac{p}{p^2+1} - A\frac{1}{p^2+1}$$

vagyis

$$x_1(t) = A\cos t + B\sin t - t\cos t$$
$$x_2(t) = B\cos t - A\sin t + t\sin t.$$