Matematika A3 villamosmérnököknek
4. gyakorlat

Divergencia, gradiens, rotáció

I. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket, ahol r az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, vagyis $r(x,y,z) = (x,y,z)$ és $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1.	$\operatorname{grad}\log\|r\|^3$	2.	$\operatorname{grad}\|r\|^5$	3.	$\operatorname{div}(\|r\|\cdot\operatorname{grad}\ln\|r\|^3)$
4.	$\operatorname{div}\operatorname{grad}\|r\|^5$	5*.	$\operatorname{grad} f(\|r\|)$	6*.	$\operatorname{div}\operatorname{grad} f(\|r\|)$

II. Igazoljuk a rotációra vonatkozó alábbi összefüggéseket! (Itt r az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, $a \in \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ és $g \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.)

1.	$\operatorname{rot}(a \times r) = 2a$	2.	$\operatorname{rot}(r^2 \cdot r) = 0$
3.	$\operatorname{rot}((ar)\cdot r) = a \times r$	4.	$\operatorname{rot}(r^2 \cdot a) = 2r \times a$
5.	$\operatorname{rot}(a\,\|r\|) = \dfrac{r \times a}{\|r\|}$	6*.	$\operatorname{rot}(fg) = f\operatorname{rot} g + (\operatorname{grad} f) \times g$

III*. Igazolja az alábbi azonosságokat!

1. Ha $U_1, U_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, akkor
$$\operatorname{grad}(U_1U_2) = U_1\operatorname{grad}U_2 + U_2\operatorname{grad}U_1.$$
2. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ és $V \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, akkor
$$\operatorname{div}(UV) = U\operatorname{div}V + \langle V, \operatorname{grad}U\rangle.$$
3. Ha $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, akkor
$$\operatorname{div}(V_1 \times V_2) = \langle V_2, \operatorname{rot}V_1\rangle - \langle V_1, \operatorname{rot}V_2\rangle.$$
4. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ és $V \in C^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$, akkor
$$\operatorname{rot}(UV) = U\operatorname{rot}V + \operatorname{grad}U \times V.$$

IV. Igazoljuk a kétszer folytonosan differenciálható függvényekre vonatkozó alábbi azonosságokat.

1. $\operatorname{div}\operatorname{grad} = \Delta$
2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$
3. $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$

4*. $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$

Potenciálos terek

I. Tegyük fel, hogy a

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) \mapsto x^3 + xy^2 + z$$

potenciálfüggvény ír le valamilyen fizikai kölcsönhatást. Milyen hely-erő $r \mapsto v(r)$ vektormező származtatható a potenciálból?

II. Az alábbi $v(r)$ vektormezők származtathatók-e egy potenciálos térből az adott V tartományban, és ha igen, határozzuk meg a potenciált.

1. $v(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x,y,z > 0\right\}$
2. $v(r) = \frac{r}{\|r\|^2} \qquad V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
3. $v(x,y) = (y,x) \qquad V = \mathbb{R}^2$
4. $v(x,y) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x}\right) \qquad V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\right\}$

III*. Tekintsük az

$$S : \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 > 0\right\} \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

vektormezőt. (Mely egy végtelen egyenes vezetőben folyó egyenáram mágneses mezőjét írja le.) Igazoljuk, hogy $\operatorname{rot} S = 0$ teljesül, azonban S mégsem állítható elő egy függvény gradienseként! Miért?