

Matematika A3 villamosmérnököknek

5. gyakorlat

Ívhosszszámítás és vonalmenti integrál

I. Ívhosszszámítás.

1. Mekkora a $\Gamma = \{(3 \cos t, 2t, 3 \sin t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0, 2\pi]\}$ görbe ívhossza?
2. Mekkora a $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 9], y = x^{\frac{3}{2}}\}$ görbe ívhossza?
3. Mekkora az $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $r(\varphi) = \varphi$ esetén az $(r(\varphi), \varphi)$ polárkoordinátákkal adott görbe ívhossza, ha $\varphi \in [0, 2\pi]$?

II. Vonalmenti integrál.

Határozzuk meg az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ görbe menti integrálját, ahol

1. $f(x, y, z) = (y^2 - x^2, 2yz, -x^2)$, $I = [0, \pi]$ és $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$;
2. $f(x, y, z) = (y + z^2, x + z, x + y)$ és γ az $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$ háromszög oldala az $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ bejárással;
3. $f(x, y, z) = (2yz + x^2, 2xz + y^2, 2xy + z^2)$ és γ tetszőleges folytonosan differenciálható görbe a $(2, 1, 3)$ és a $(-1, 3, -2)$ pontok között;
- 4*. $f(x, y, z) = (xy, y, 0)$, $I = [0, \pi]$ és $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 0)$ (ciklois);
- 5*. $f(x, y, z) = (2xy^2, 2x^2y, -2x^2y^2)$ és γ_1 az $x^2 + z^2 = 1$ és az $y = 2$ felületek metszészvonala, valamint γ_2 az $x^2 + y^2 = 1$ és $z = 1$ felületek metszészvonala.

Felzínyszámítás és felületi integrál

I. Felzínyszámítás.

Határozzuk meg az alábbi felületek felszínét.

1. Az origó középpontú $R \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömb.
- 2*. Tórusz, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b \leq a$ és a paraméterezés

$$P : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\vartheta, \varphi) \mapsto ((a + b \cos \varphi) \cos \vartheta, (a + b \cos \varphi) \sin \vartheta, b \sin \varphi).$$

II. Felületi integrál.

Határozzuk meg az adott függvények integrálját a megadott F felületeken.

1. Legyen $f(x, y, z) = xyz$ és F az a felület, melynek paraméterezése

$$P : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, u^2).$$

2. Legyen $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v(r) = r$ és F az $(1, 0, 0)$ középpontú 1 sugarú gömbhéj $z \geq 0$ része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0, 0, 1) \rangle \geq 0$ teljesüljön.
- 3*. Legyen $v(x, y, z) = (x, 3x, -2z)$, továbbá F legyen az $(1, 2, 3)$ csúcspontú és a $z = 1$ síkban az $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ vezérgörbékű kúp palástjának a $z = 1$ és a $z = 3$ síkok közötti része, valamint a felület n normálvektorára $\langle n, (0, 0, 1) \rangle \geq 0$ teljesüljön.

Térfogatszámítás és hármas integrál

I. Térfogatszámítás.

Határozzuk meg az alábbi $V \subseteq \mathbb{R}^3$ halmazok térfogatát!

1. Legyen V az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű hengernek a $z = 0$ és az $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok közé eső része.
2. Legyen V az a gömbhéjcsikk, melyet a gömbi koordinátákkal adott $r = 1$ és $r = 2$ sugarú gömbök és a $\vartheta = \pi/4$ és a $\vartheta = \pi/3$ kúpok határolnak.
3. Legyen V a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ felületek közé eső rész.
4. Legyen V a $z = x^2 + y^2$ paraboloid, a $z = 0$ sík és az $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ henger határolt korlátos térrész.
- 5*. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y^2 + z^2 \leq R^2\}$.
- 6*. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + z^2 \leq R^2\}$.
- 7*. Legyen V az $R \in \mathbb{R}^+$ középsugarú és $r \in]0, R[$ gyűrűsugarú tórusz.
- 8*. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xy - 4yz \leq R^2\}$.

II. Hármas integrál.

Adott $T \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén számoljuk ki a $\iiint_T f$ integrált!

1. Legyen T a $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ és a $z = 0$ egyenletek által meghatározott korlátos tartomány, és $f(x, y, z) = xy^2z^3$.
2. Legyen T a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 1$ felületekkel határolt korlátos tartomány és $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Legyen T a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ és az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x, y, z) = xyz$.
4. Legyen T a $z \geq 2$ és a $z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x, y, z) = 2z$.
5. Legyen T a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ és a $2z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x, y, z) = xy^2z^3$.
6. Legyen T a $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és a $3z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány és $f(x, y, z) = x^2z$.
- 7*. Adott $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ paraméterek esetén legyen $T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ és

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$