

Matematika A3 villamosmérnököknek 6. gyakorlat

Gauss–Osztrogradskij-tétel és Stokes-tétel

I. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Legyen F a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része, és az n normális vektorára teljesüljön az $\langle n, (0, 0, 1) \rangle \geq 0$ egyenlet. Továbbá legyen

$$v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (xz^2, zy^2, yx^2)$$

Határozzuk meg az $\iint_F \operatorname{rot} v \, dF$ integrál értékét.

2. Számoljuk ki a

$$v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$$

vektormező fluxusát a $9z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ egyenletek által meghatározott kúpfelületen, ha a felület normálisát kifelé irányítjuk.

3. Legyen

$$v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, -2z),$$

és legyen F az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \leq y \leq 4$ része $\langle n, (0, 1, 0) \rangle \geq 0$ irányítással, ahol n a felület normálvektora. Határozzuk meg az $\iint_F v \, dF$ integrál értékét.

4. Legyen $v(x, y, z) = (x + e^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, 0)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \geq 0$ része.

Határozzuk meg az $\iint_F v \, dF$ integrál értékét.

5. Legyen $v(x, y, z) = (x + e^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, z)$ és F az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z > 0$ része.

Határozzuk meg az $\iint_F v \, dF$ integrál értékét.

II*. Keressük meg a hibát az alábbi gondolatmenetekben.

1. Legyen v egy nyugvó ponttöltés elektromos tere, vagyis

$$v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r \mapsto \frac{r}{\|r\|^3}.$$

Mivel $\operatorname{div} v = 0$ ezért az R sugarú nulla középpontú gömbre integrálva a $\operatorname{div} v$ függvényt nullát kapunk. Az R sugarú gömbhéjra vett integrálja a v vektormezőnek viszont 4π . Azonban $0 \neq 4\pi$!

2. Legyen v egy egyenárammal átjárt végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere, vagyis

$$v : \mathbb{R}^3 \setminus ((0, 0) \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} (-x_2, x_1, 0).$$

Ekkor $\operatorname{rot} v = 0$, vagyis az $x_3 = 0$ síkban a nulla középpontú R sugarú körlapra integrálva a $\operatorname{rot} v$ függvényt nullát kapunk. Az előbbi kör határán vett integrálja a v vektormezőnek viszont 2π . Azonban $0 \neq 2\pi$!