Matematika A3 villamosmérnököknek
7. gyakorlat

Elemi sorösszegek és geometriai sorok

I. Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+2n} = 3$ 3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3-n} = 1$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = 1$ 5*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$ 6*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1$

II. Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^{2n}\,\mathrm{i}}$

Majoráns, minoráns, gyök- és hányadoskritérium

I. A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-8n^2+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n+3}{2n^4+2n^2+7}$

II. A gyökkritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n}$

4*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{3^{2n+1}}$ 5*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$ 6*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{9^n}$

III. A hányadoskritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 3*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$

Leibniz-, abszolút és feltételesen konvergens sorok

I. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1}$

4*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 5*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$ 6*. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\log n}$

II. Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4}-nél kisebb!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2}{5^{2n}+3n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^n n+3}$$

Hatványsorok

I. Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát és adjuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesznek konvergensek a sorok!

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} x^n$ 5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!}(x+7)^n$

Fourier-sor

I. Igazoljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket.

1. $f(x) = \pi - x$ $\qquad$ $\mathcal{S}(f)(x) = \pi + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kx}{k}$

2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ $\qquad$ $\mathcal{S}(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$

3*. $f(x) = \pi - \frac{x^2}{\pi}$ $\qquad$ $\mathcal{S}(f)(x) = \frac{2\pi}{3} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos kx}{k^2}$

II*. Igazoljuk a $[0, 2\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket, ahol $a \in]0, 1[$.

1. $f(x) = x^2$ $\qquad$ $\mathcal{S}(f)(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\cos kx - \frac{4\pi}{k}\sin kx$

2. $f(x) = \sin(ax)$ $\qquad$ $\mathcal{S}(f)(x) = \frac{\sin^2(\pi a)}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a\sin^2(\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\cos kx + \frac{k\sin(2\pi a)}{\pi(a^2-k^2)}\sin kx$

A Dirichlet-féle lokalizációs tétel segítségével mutassuk meg a fenti sorok felhasználásával az alábbiakat.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1 - \pi a \operatorname{ctg}(\pi a)}{2a^2}$