Matematika A3 villamosmérnököknek
2020/21/II. U0 kurzus
1. pótzárthelyi dolgozat
2021. 05. 12. 18.15–20.00

I. Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát. *(15 p.)*

$$(y(x) - \alpha x)y'(x) + x(\alpha^2 - 1) - \alpha y(x) = 0 \qquad y(0) = \alpha$$

Megoldás.
Mivel az egyenlet $P(x, y)y'(x) + Q(x, y) = 0$ alakú továbbá $\partial_1 P = \partial_2 Q$ teljesül, ezért az egyenlet egzakt. Az egyenlet általános megoldására

$$\frac{y^2}{2} - \alpha xy + \frac{x^2}{2}(\alpha^2 - 1) = C \qquad C \in \mathbb{R}$$

adódik. A megadott kezdeti érték alapján

$$y^2 - 2 \cdot \alpha xy + x^2(\alpha^2 - 1) = \alpha^2,$$

vagyis

$$(y - \alpha x)^2 = \alpha^2 + x^2.$$

Tehát $y(x) = \alpha x + \sqrt{\alpha^2 + x^2}$ a megoldás.

II. Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát. *(20 p.)*

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha + 3)x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + \alpha x_2(t) \end{cases} \qquad x_1(0) = 2 \quad x_2(0) = 1$$

Megoldás.
Az $A = \begin{pmatrix} \alpha + 3 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékei és sajátvektorai

$$\lambda_1 = \alpha - 1, \ v_1 = (-1, 2); \qquad \lambda_2 = \alpha + 4, \ v_2 = (2, 1).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása ezek alapján

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t) = C_1 \, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \, \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti értékek alapján $C_1 = 0$ és $C_2 = 1$, vagyis

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2 \, \mathrm{e}^{(\alpha+4)t} \\ \dot{x}_2(t) &= \mathrm{e}^{(\alpha+4)t}. \end{aligned}$$

III. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(r) = \mathrm{e}^{-\alpha\|r\|}$, ahol $r = (x, y, z)$ és $\|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Határozza meg az $\dfrac{(\Delta f)(r)}{f(r)} + \dfrac{2\alpha}{\|r\|}$ függvényt. *(20 p.)*

Megoldás.
Mivel $(\Delta f)(r) = \alpha f(r)\left(\alpha - \dfrac{2}{\|r\|}\right)$, ezért $\dfrac{(\Delta f)(r)}{f(r)} + \dfrac{2\alpha}{\|r\|} = \alpha^2$.

IV. Határozza meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + 4 \cdot \beta z}}$ függvény integrálját azon az F felületen, melynek paraméterezése *(20 p.)*

$$P : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (\alpha u \cos v, \alpha u \sin v, \beta u^2).$$

Megoldás.

A felület normálvektora $n(u,v) = \pm(2\cdot\alpha u^2\cos v, 2\cdot\alpha u^2\sin v, -\alpha\cdot\beta u)$ és ennek hossza $\|n(u,v)\| = \alpha u\sqrt{4\cdot\beta^2u^2+\alpha^2}$. Ezek alapján a keresett integrál az alábbi.

$$\iint\limits_F f = \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\alpha u\sqrt{4\cdot\beta^2u^2+\alpha^2}\cdot\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+4\cdot\beta^2z^2}}\,\mathrm{d}\,v\,\mathrm{d}\,u = 2\pi\int\limits_0^1\alpha\cdot\beta u\,\mathrm{d}\,u = \alpha\cdot\beta\pi$$

V. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\alpha x+3z$, valamint *(20 p.)*

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle|\ \alpha x^2+\beta y^2\le z\le 6-\sqrt{\alpha x^2+\beta y^2}\right\}.$$

Határozza meg az $\iiint\limits_\Omega f$ integrál értékét.

Megoldás.

Alkalmazzuk az $x=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}r\cos\varphi$ és $y=\frac{1}{\sqrt{\beta}}r\sin\varphi$ helyettesítést. A megadott tartományra vonatkozó egyenlőtlenség ekkor $r^2\le z\le 6-r$. A $0\le r$ és az $r^2\le 6-r$ egyenlőtlenségek miatt $r\in[0,2]$. A keresett integrál az alábbi.

$$\iiint\limits_\Omega f = \int\limits_0^2\int\limits_{r^2}^{6-r}\int\limits_0^{2\pi}(\sqrt{\alpha}r\cos\varphi+3z)\frac{r}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,r = \frac{3\pi}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}\int\limits_0^2 r((6-r)^2-r^4)\,\mathrm{d}\,r = \frac{50\pi}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}$$