Matematika A3 villamosmérnököknek
2020/21/II. U0 kurzus
1. zárthelyi dolgozat
2021. 04. 21. 18.15–19.45

I. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet. *(15 p.)*

$$y'(x) - 2 \cdot \alpha x y(x) = 2x\,\mathrm{e}^{\alpha x^2} \qquad y\,(0) = \beta$$

Megoldás.
$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x^2}(\beta + x^2)$

II. Oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát. *(20 p.)*

$$y''''(x) + \alpha^2 y''(x) = 6 \cdot \alpha^2 x \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \cdot \alpha,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 6 - \alpha^3$$

Megoldás.
A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x) + x^3 + C_3 x + C_4, \qquad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R},$$

a kedeti érték probléma megoldása pedig $y(x) = \sin(\alpha x) + x^3 + \alpha x + 1$.

III. Határozza meg az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \alpha x y + \beta(x^2 - z)$ függvény *(20 p.)*

1. gradiensét a $P = (1, -1, 1)$ pontban;
2. a P pontbeli $v = (1, 1, 1)$ iránymenti deriváltját;
3. valamint, hogy a P pontban melyik irányba legnagyobb a függvény iránymenti deriváltja.

Megoldás.
a.) $(\mathrm{grad}\, f)(P) = (-\alpha + 2 \cdot \beta, \alpha, -\beta)$
b.) $(\mathrm{D}_v f)(P) = \beta$
c.) A $(\mathrm{grad}\, f)(P)$ iránymenti derivált a legnagyobb.

IV. Tekintsük az *(20 p.)*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto \big(x^2 - y^2, xy, z^2\big)$$

vektormezőt és a

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad (t) \mapsto (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), \beta t)$$

paraméterezés által meghatározott görbét. Számolja ki a $\int\limits_\gamma v$ integrált.

Megoldás.

$$\int\limits_\gamma v = \int\limits_0^{2\pi} \langle v(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \,\mathrm{d}\,t = \int\limits_0^{2\pi} \alpha \sin(\alpha t)^3 + \beta^3 t^2 \,\mathrm{d}\,t = \beta^3 \int\limits_0^{2\pi} t^2 \,\mathrm{d}\,t = \beta^3 \frac{8\pi^3}{3}$$

V. Tekintsük az *(25 p.)*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \mapsto (\alpha z, \beta, -\alpha x)$$

vektormezőt és a

$$p : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (u + 2v, u^2 + v^2, u + v)$$

paraméterezés által meghatározott $F = \operatorname{Ran} p$ felületet. Számolja ki a $\iint\limits_F v$ integrált, ahol a felületet úgy irányítjuk, hogy az n normálvektorára $\langle n, (0, 1, 0)\rangle > 0$ teljesüljön.

Megoldás.

A felület normálvektora

$$n(u, v) = (\partial_1 p)(u, v) \times (\partial_2 p)(u, v) = (2u - 2v, 1, 2v - 4u).$$

A keresett integrál pedig

$$\iint\limits_F v = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \langle f(p(u, v)), n(u, v)\rangle \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 6 \cdot \alpha u^2 + 6 \cdot \alpha uv - 6\alpha v^2 + \beta \,\mathrm{d}\, u \,\mathrm{d}\, v = \frac{3 \cdot \alpha}{2} + \beta.$$