

Matematika A3 villamosmérnököknek

1. gyakorlat

Szétválasztható differenciálegyenletek

I. Keressük meg azokat az $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket melyek megoldásai a következő szétválasztható, illetve szétválaszthatóra visszavezethető differenciálegyenleteknek, illetve a megadott kezdeti érték problémának.

1. $y'(x) = \frac{x^2}{e^{3x}}$ $y(1) = 0$
2. $y'(x) = \frac{1 + y(x)^2}{x}$ $y(e) = 1$
3. $y'(x) = \frac{x - y(x)}{x + y(x)}$ $y(0) = 1$
4. $y'(x) = ky(x)(1 - y(x)) \quad k \in \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Elsőrendű differenciálegyenletek

I. Oldjuk meg az alábbi lineáris elsőrendű differenciálegyenleteket.

1. $y'(x) + y(x) = x + e^{-2x} \quad y(0) = -2$
2. $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{\cos x}{x^2} \quad y(\pi) = 0$
3. $xy'(x) + 2y(x) = \sin x \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$

II*. Gonosz Manó: Tegyük fel, hogy egy l hosszúságú rugalmas gumiszál egyik vége a falhoz van rögzítve, a másik végén pedig egy hangya sétál a gumiszálon a fal felé a gumiszálhoz képest v sebességgel. Ám egy gonosz manó elkezdi a gumiszál szabad végét húzni w sebességgel a fallal ellentétes irányba. Mely sebességparaméterek esetén tudja a hangya még elérni a falat? A $l = 1\text{m}$, $v = 0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $w = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ paraméterek mellett, mennyi idő éri el a hangya a falat, ha egyáltalán eléri valamikor?

III. A közegellenállási erő néhol a sebességgel és néhol a sebesség négyzetével arányos. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora utat tesz meg a v kezdeti sebességgel rendelkező test, ha csak a közegellenállási erő hat rá egyenesen arányosan, illetve négyzetesen a sebességgel.

Egzakt differenciálegyenletek

I. Adjuk meg az alábbi egzakt differenciálegyenletek megoldását implicit alakban, és ha lehet, a kezdeti érték probléma megoldását adjuk meg explicit alakban.

1. $2x^3 - xy(x)^2 + (2y(x)^3 - x^2y(x))y'(x) = 0 \quad y(0) = 1$
2. $xy(x)^2 + (1 + x^2y(x))y'(x) = 0 \quad y(0) = 1$
3. $y'(x) = \frac{\sin y(x) + y(x) \sin x}{\cos x - x \cos y(x)}$

II*. Keressünk megfelelő multiplikátort, hogy egzaktá tegyük az alábbi differenciálegyenleteket, és oldjuk is meg.

1. $e^{-y(x)} + (xe^{-y(x)} - 2y(x)e^{-2y(x)})y'(x) = 0$
2. $xe^{y(x)} + (x^2e^{y(x)} + 2y(x)e^{-y(x)})y'(x) = 0$
3. $y(x) + \frac{1}{1+x^2} + \left(2x + \frac{\arctg x}{y(x)}\right)y'(x) = 0$