

Matematika A3 villamosmérnököknek

4. gyakorlat

Divergencia, gradiens, rotáció

I. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket, ahol r az $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, vagyis $r(x, y, z) = (x, y, z)$ és $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. $\text{grad } \log \|r\|^3$
2. $\text{grad } \|r\|^5$
3. $\text{div}(\|r\| \cdot \text{grad } \ln \|r\|^3)$
4. $\text{div grad } \|r\|^5$
- 5*. $\text{grad } f(\|r\|)$
- 6*. $\text{div grad } f(\|r\|)$

II. Igazoljuk a rotációra vonatkozó alábbi összefüggéseket! (Itt r az $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ identitásfüggvény, $a \in \mathbb{R}^3$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ és $g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.)

1. $\text{rot}(a \times r) = 2a$
2. $\text{rot}(r^2 \cdot r) = 0$
3. $\text{rot}((ar) \cdot r) = a \times r$
4. $\text{rot}(r^2 \cdot a) = 2r \times a$
5. $\text{rot}(a \|r\|) = \frac{r \times a}{\|r\|}$
- 6*. $\text{rot}(fg) = f \text{rot } g + (\text{grad } f) \times g$

III*. Igazolja az alábbi azonosságokat!

1. Ha $U_1, U_2 \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, akkor

$$\text{grad}(U_1 U_2) = U_1 \text{grad } U_2 + U_2 \text{grad } U_1.$$

2. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ és $V \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, akkor

$$\text{div}(UV) = U \text{div } V + \langle V, \text{grad } U \rangle.$$

3. Ha $V_1, V_2 \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, akkor

$$\text{div}(V_1 \times V_2) = \langle V_2, \text{rot } V_1 \rangle - \langle V_1, \text{rot } V_2 \rangle.$$

4. Ha $U \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ és $V \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, akkor

$$\text{rot}(UV) = U \text{rot } V + \text{grad } U \times V.$$

IV. Igazoljuk a kétszer folytonosan differenciálható függvényekre vonatkozó alábbi azonosságokat.

1. $\text{div grad} = \Delta$
2. $\text{rot grad} = 0$
3. $\text{div rot} = 0$
- 4*. $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$

Potenciális terek

I. Tegyük fel, hogy a

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y, z) \mapsto x^3 + xy^2 + z$$

potenciálfüggvény ír le valamilyen fizikai kölcsönhatást. Milyen hely-erő $r \mapsto v(r)$ vektormező származtatható a potenciálból?

II. Az alábbi $v(r)$ vektormezők származtathatók-e egy potenciális térből az adott V tartományban, és ha igen, határozzuk meg a potenciált.

1. $v(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$
2. $v(r) = \frac{r}{\|r\|^2}$ $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
3. $v(x, y) = (y, x)$ $V = \mathbb{R}^2$
4. $v(x, y) = \left(\frac{y}{x^2}, \frac{-1}{x}\right)$ $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$

III*. Tekintsük az

$$S : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$

vektormezőt. (Mely egy végtelen egyenes vezetőben folyó egyenáram mágneses mezőjét írja le.) Igazoljuk, hogy $\operatorname{rot} S = 0$ teljesül, azonban S mégsem állítható elő egy függvény gradienseként! Miért?