# Matematika A3 villamosmérnököknek
# 6. gyakorlat

## Gauss–Osztrogradszkij-tétel és Stokes-tétel

I. Az ismert integráltételek segítségével oldjuk meg az alábbi feladatokat.

1. Legyen $F$ a $z = 4 - x^2 - y^2$ felület $z \geq 0$ része, és az $n$ normális vektorára teljesüljön az $\langle n, (0,0,1)\rangle \geq 0$ egyenlet. Továbbá legyen
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (xz^2, zy^2, yx^2)$$
Határozzuk meg az $\iint\limits_F \operatorname{rot} v \; \mathrm{d}F$ integrál értékét.

2. Számoljuk ki a
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$$
vektormező fluxusát a $9z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$ egyenletek által meghatározott kúpfelületen, ha a felület normálisát kifele irányítjuk.

3. Legyen
$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \mapsto (x, y, -2z),$$
és legyen $F$ az $y = x^2 + 4z^2$ paraboloid $0 \leq y \leq 4$ része $\langle n, (0,1,0)\rangle\rangle \geq 0$ irányítással, ahol $n$ a felület normálvektora. Határozzuk meg az $\iint\limits_F v \; \mathrm{d}F$ integrál értékét.

4. Legyen $v(x,y,z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, 0\right)$ és $F$ az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z \geq 0$ része. Határozzuk meg az $\iint\limits_F v \; \mathrm{d}F$ integrál értékét.

5. Legyen $v(x,y,z) = \left(x + \mathrm{e}^{y^2 \sin z}, \cos x \operatorname{sh} z + y^2, z\right)$ és $F$ az $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ gömb $z > 0$ része. Határozzuk meg az $\iint\limits_F v \; \mathrm{d}F$ integrál értékét.

II*. Keressük meg a hibát az alábbi gondolatmenetekben.

1. Legyen $v$ egy nyugvó ponttöltés elektromos tere, vagyis
$$v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3 \qquad r \mapsto \frac{r}{\|r\|^3}.$$
Mivel $\operatorname{div} v = 0$ ezért az $R$ sugarú nulla középpontú gömbre integrálva a $\operatorname{div} v$ függvényt nullát kapunk. Az $R$ sugarú gömbhéjra vett integrálja a $v$ vektormezőnek viszont $4\pi$. Azonban $0 \neq 4\pi$!

2. Legyen $v$ egy egyenárammal átjárt végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere, vagyis
$$v : \mathbb{R}^3 \setminus ((0,0) \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3 \qquad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2, x_1, 0).$$
Ekkor $\operatorname{rot} v = 0$, vagyis az $x_3 = 0$ síkban a nulla középpontú $R$ sugarú körlapra integrálva a $\operatorname{rot} v$ függvényt nullát kapunk. Az előbbi kör határán vett integrálja a $v$ vektormezőnek viszont $2\pi$. Azonban $0 \neq 2\pi$!