

Matematika A3 villamosmérnököknek 7. gyakorlat

Elemi sorösszegek és geometriai sorok

I. Igazoljuk a sorokra vonatkozó alábbi összefüggéseket!

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1} = 1 & 2. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 2n} = 3 & 3. \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3 - n} = 1 \\ 4. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = 1 & 5^*. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 & 6^*. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^2+n}} = 1 \end{aligned}$$

II. Konvergensek-e az alábbi sorok és ha igen, mi a határértékük?

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(-5)^{n+2}} & 2. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-2}} & 3. \quad & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{2n} i} \end{aligned}$$

Majoráns, minoráns, gyök- és hányadoskritérium

I. A majoráns, illetve minoráns kritérium segítségével döntsek el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, illetve melyek divergensek.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2} & 2. \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 8n^2 + 1} & 3. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - n + 3}{2n^4 + 2n^2 + 7} \end{aligned}$$

II. A gyökkritérium segítségével döntsek el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n} & 2. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5 4^{n+1}} & 3. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^n} \\ 4^*. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n-2} \right)^{n^2} \frac{1}{3^{2n+1}} & 5^*. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^{n^2} & 6^*. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{n^2} \frac{1}{9^n} \end{aligned}$$

III. A hányadoskritérium segítségével döntsek el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek illetve melyek divergensek.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!} & 2. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & 3^*. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} \end{aligned}$$

Leibniz-, abszolút és feltételesen konvergens sorok

I. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek illetve feltételesen konvergensek-e.

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} & 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1} & 3. \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2-1} \\
 4^*. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & 5^*. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \right) & 6^*. \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}
 \end{array}$$

II. Becsüljük meg, hogy hányadik részletösszeg esetén lesz a sor összegére kapott becslés hibája 10^{-4} -nél kisebb!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{5^{2n} + 3n^2 + 1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{10^{n^2} + 3}$$

Hatványsorok

I. Számítsuk ki a következő hatványsorok konvergenciasugarát és adjuk meg, hogy mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesznek konvergensek a sorok!

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sum_{n=0}^{\infty} nx^n & 2. \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n & 3. \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^n \\
 4. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n} x^n & 5. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} & 6. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n)!} (x+7)^n
 \end{array}$$

Fourier-sor

I. Igazoljuk a $[-\pi, \pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket.

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad f(x) = \pi - x & \mathcal{S}(f)(x) = \pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin kx}{k} \\
 2. \quad f(x) = \operatorname{sgn} x & \mathcal{S}(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \\
 3^*. \quad f(x) = \pi - \frac{x^2}{\pi} & \mathcal{S}(f)(x) = \frac{2\pi}{3} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos kx}{k^2}
 \end{array}$$

II*. Igazoljuk a $[0, 2\pi]$ intervallumon adott f függvények $\mathcal{S}(f)$ Fourier-sorára vonatkozó képleteket, ahol $a \in]0, 1[$.

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad f(x) = x^2 & \mathcal{S}(f)(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos kx - \frac{4\pi}{k} \sin kx \\
 2. \quad f(x) = \sin(ax) & \mathcal{S}(f)(x) = \frac{\sin^2(\pi a)}{\pi a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a \sin^2(\pi a)}{\pi(a^2 - k^2)} \cos kx + \frac{k \sin(2\pi a)}{\pi(a^2 - k^2)} \sin kx
 \end{array}$$

A Dirichlet-féle lokalizációs tétel segítségével mutassuk meg a fenti sorok felhasználásával az alábbiakat.

$$\begin{array}{l}
 1. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \\
 2. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1 - \pi a \operatorname{ctg}(\pi a)}{2a^2}
 \end{array}$$