Kalkulus 2.

1. Pótzárthelyi dolgozat

2021. 4. 23. 8.15-10.00

(6 p.)

1/a. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon az alábbi halmazt.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \geq \alpha,\ 0 < x,\ 0 \leq y\} \cup \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in \mathbb{R}\}$$

Határozza meg az A halmaz belsejét, torlódási pontjai és lezártját.

Megoldás.

$\operatorname{Int} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 > \alpha,\ 0 < x,\ 0 < y\}$

Torlódási pontok halmaza $= \overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \geq \alpha,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y\} \cup \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in \mathbb{R}\}$.

(6 p.)

1/b. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon az alábbi halmazt.

$$A = \left\{\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 |\ n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 |\ \beta < x\}$$

Határozza meg az A halmaz belsejét, torlódási pontjai és lezártját.

Megoldás.

$\operatorname{Int} A = \emptyset$

Torlódási pontok halmaza $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 |\ \beta \leq x\} \cup \{(0, 0)\}$.

$\overline{A} = \left\{\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 |\ n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 |\ \beta \leq x\} \cup \{(0, 0)\}$.

(6 p.)

1/c. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon az alábbi halmazt.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 |\ x^2 \leq y^2 \leq \alpha\}$$

Határozza meg az A halmaz belsejét, torlódási pontjai és lezártját.

Megoldás.

$\operatorname{Int} A = \emptyset$

Torlódási pontok halmaza $= \overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 \leq y^2 \leq \alpha\}$.

(8 p.)

2/a. Határozza meg a

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,0)} \frac{x + y - \alpha}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha - y}}$$

határértéket, amennyiben létezik.

Megoldás.

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,0)} \frac{x + y - \alpha}{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha - y}} = \lim_{(x,y)\to(\alpha,0)} \frac{(x + y - \alpha)(\sqrt{x} + \sqrt{\alpha - y})}{x - \alpha + y} = \lim_{(x,y)\to(\alpha,0)} \sqrt{x} + \sqrt{\alpha - y} = 2\sqrt{\alpha}$$

(8 p.)

2/b. Határozza meg a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\alpha x^2 + \beta y^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$$

határértéket, amennyiben létezik.

Megoldás.

Polárkoordinátákat használva

$$\lim_{r\to 0} r^2(\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi) \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right) = 0$$

adódik.

3. Tekintsük az *(18 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto \begin{cases} x+\dfrac{\alpha x^2}{x^2+y^2}-\beta y\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right), & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvényt.

a.) Folytonos-e az f függvény?

b.) Számolja ki a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$ mennyiséget, ahol azok léteznek.

c.) Igazolja, hogy f függvény folytonosan differenciálható az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ halmazon.

d.) Differenciálható-e az f függvény?

e.) Határozza meg az f függvény $P=(0,\beta)$ pontbeli $v=(\beta,4)$ iránymenti deriváltját.

Megoldás.

a.) A függvénynek nem létezik határértéke a $(0,0)$ pontban, ezért ott nem folytonos.

b.) Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor

$$(\partial_1 f)(x,y)=1+\frac{2\cdot\alpha x(x^2+y^2)-2\cdot\alpha x^3}{(x^2+y^2)^2}+\beta y\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

$$(\partial_2 f)(x,y)=-\frac{\alpha x^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y-\beta\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2+1}\right),$$

az origóban pedig

$$(\partial_1 f)(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h+\alpha}{h}=1+\alpha\lim_{h\to0}\frac{1}{h},$$

$$(\partial_2 f)(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\beta h\frac{\pi}{4}}{h}=-\frac{\beta\pi}{4},$$

miatt azt kapjuk, hogy $(\partial_1 f)(0,0)$ nem létezik és $(\partial_2 f)(0,0)=-\dfrac{\beta\pi}{4}$.

c.) A parciális deriváltak mind folytonos függvények az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ nyílt halmazon, hiszen ott folytonos függvények kompozíciójaként előállnak. Ezért, ezen nyílt halmazon a függvény folytonosan differenciálható.

d.) Nem, mivel nem folytonos.

e.) A b.) pont alapján $(\mathrm{grad}\, f)(P)=\left(1,-\dfrac{\beta\pi}{4}\right)$, ezért

$$(\mathrm{D}_v\, f)(P)=\langle(\mathrm{grad}\, f)(P),v\rangle=\beta(1-\pi).$$

4/a. Határozza meg az *(10 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto (x-\alpha^2 y)\exp\left(\frac{-x^2}{\alpha^2}-\alpha^2y^2\right)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás.

A $(\mathrm{D}\,f)(P)=0$ egyenlet megoldásai $P_1=\left(\frac{-\alpha}{2},\frac{1}{2\cdot\alpha}\right)$ és $P_2=\left(\frac{\alpha}{2},\frac{-1}{2\cdot\alpha}\right)$. A Hesse-mátrix ezekben a pontokban

$$B_1=\mathrm{e}^{-1/2}\begin{pmatrix}\frac{3}{\alpha} & -\alpha\\ -\alpha & 3\cdot\alpha^2\end{pmatrix} \qquad B_2=\mathrm{e}^{-1/2}\begin{pmatrix}-\frac{3}{\alpha} & \alpha\\ \alpha & -3\cdot\alpha^2\end{pmatrix}.$$

Mivel $\det B_1=\det B_2=8\,\mathrm{e}^{-1}\cdot\alpha^2>0$, ezért a két sajátérték azonos előjelű. A $\operatorname{Tr}B_1>0$ miatt a P_1 pontban lokális minimuma van a függvénynek, $\operatorname{Tr}B_2<0$ miatt pedig a P_2 pontban lokális maximuma van.

4/b. Határozza meg az *(10 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto (1+\mathrm{e}^y)\cos(x)-(\alpha+y)\,\mathrm{e}^y$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás.

A $(\mathrm{D}\,f)(P)=0$ egyenlet megoldásai $x_{1k}=2k\pi, y_{1k}=-\alpha$ és $x_{2k}=\pi+2k\pi, y_{2k}=-\alpha-2$, ahol $k\in\mathbb{Z}$. A Hesse-mátrix ezekben a pontokban

$$B_1=\begin{pmatrix}-1-\mathrm{e}^{-\alpha} & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^{-\alpha}\end{pmatrix} \qquad B_2=\mathrm{e}^{-1/2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{e}^{-\alpha-2} & 0\\ 0 & -\mathrm{e}^{-\alpha-2}\end{pmatrix}.$$

Az $(x_{1k},y_{1k})_{k\in\mathbb{Z}}$ pontokban lokális maximuma van a függvénynek, az $(x_{2k},y_{2k})_{k\in\mathbb{Z}}$ pontok pedig nyeregpontok, így itt nincs lokális szélsőérték.

4/c. Határozza meg az *(10 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto xy^2+\alpha y-\log(x^2y^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás.

A $(\mathrm{D}\,f)(P)=0$ egyenlet megoldása $P=\left(\frac{\alpha^2}{2},-\frac{2}{\alpha}\right)$. A Hesse-mátrix ebben a pontban

$$B=\begin{pmatrix}\frac{8}{\alpha^4} & -\frac{4}{\alpha}\\ -\frac{4}{\alpha} & -\frac{3\cdot\alpha^2}{2}\end{pmatrix}.$$

Mivel $\det B=-\frac{4}{\alpha^2}<0$ ezért ez nyeregpont, így itt nincs lokális szélsőérték. Tehát a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

5/a. Legyen $p \in \mathbb{R}$ paraméter és tekintsük az $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2$ halmazok szorzatán értelmezett *(10 p.)*

$$f : E \times F \to \mathbb{R}^2 \qquad ((x,y),(u,v)) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(xuv) + yv + xy + u \\ x + \alpha y + \beta uv + pv^3 \end{pmatrix}$$

függvényt, valamint az $a_1 = (0,2) \in E$ és a $a_2 = (1,1) \in F$ pontokat.

a.) Az implicitfüggvény-tétel alapján a p paraméter mely értékei esetén létezik olyan $\varphi : E \to F$ függvény, mely az a pont egy környezetén értelmezett, $\varphi(a_1) = a_2$ és minden $z \in \operatorname{Dom}\varphi$ pontra $f(z, \varphi(z)) = f(a_1, a_2)$ teljesül?

b.) A $p = 0$ esetben határozza meg a $(\mathrm{D}\,\varphi)(a_1)$ deriváltat.

Megoldás.

a.) Az f függvény folytonosan deriválható és

$$A = (\partial_2 f)(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} xv\cos(xuv) + 1 & xu\cos(xuv) + y \\ \beta v & 3pv^2 + \beta u \end{pmatrix} \Big|_{x=0,y=2,u=v=1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \beta & \beta + 3p \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det A = -\beta + 3p$, ezért pontosan akkor létezik a feladatban kérdezett implicitfüggvény, ha $p \neq \dfrac{\beta}{3}$.

b.) Az első változó szerinti derivált

$$B = (\partial_1 f)(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} uv\cos(xuv) + y & x + v \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \Big|_{x=0,y=2,u=v=1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\,\varphi)(a_1) &= -((\partial_2 f)(a_1,a_2))^{-1}(\partial_1 f)(a_1,a_2) = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \beta & \beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta}\begin{pmatrix} -\beta & 2 \\ \beta & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta}\begin{pmatrix} 2 - 3\cdot\beta & 2\cdot\alpha - \beta \\ 3\cdot\beta - 1 & \beta - \alpha \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5/b. Tekintsük az $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *(10 p.)*

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^3 + y^2 + (p-1)x \\ y^2 - 2\cdot\beta x \end{pmatrix} \qquad g(u,v) = \begin{pmatrix} uv + v^2 \\ \alpha u + pv \end{pmatrix}$$

függvényt, ahol $p \in \mathbb{R}$ paraméter, valamint az $a = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ pontot.

a.) Az inverfüggvény-tétel alapján a p paraméter mely értékei esetén létezik a $g \circ f$ függvénynek a $b = g(f(a))$ pont egy nyílt környezetén értelmezett inverze?

b.) A $p = 0$ esetben, ha határozza meg a $(\mathrm{D}(g \circ f)^{-1})(b)$ deriváltat.

Megoldás.

a.) Az f függvény deriváltja az a pontban

$$F = (\mathrm{D}\,f)(a) = \begin{pmatrix} y^3 + p - 1 & 3xy^2 + 2y \\ -2\cdot\beta & 2y \end{pmatrix} \Big|_{x=0,y=1} = \begin{pmatrix} p & 2 \\ -2\cdot\beta & 2 \end{pmatrix}$$

, a g függvény deriváltja az $f(a)$ pontban

$$G = (\mathrm{D}\,g)(f(a)) = \begin{pmatrix} v & u + 2v \\ \alpha & p \end{pmatrix} \Big|_{u=v=1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & p \end{pmatrix}.$$

Mivel az f és a g függvény folytonosan differenciálható és $\det F = 2p + 4\cdot\beta$, $\det G = -3\cdot\alpha + p$, ezért az f függvénynek létezik differenciálható inverze, ha $p \notin \{-2\cdot\beta, 3\cdot\alpha\}$.

b.) Mivel

$$(\mathrm{D}(g\circ f)^{-1})(g(f(a))) = ((\mathrm{D}(g \circ f))(a))^{-1} = \big((\mathrm{D}\,g)(f(a))(\mathrm{D}\,f)(a)\big)^{-1} = (GF)^{-1},$$

ezért

$$(\mathrm{D}(g\circ f)^{-1})(g(f(a))) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2\cdot\beta & 2 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -6\cdot\beta & 8 \\ 0 & 2\cdot\alpha \end{pmatrix} = \frac{-1}{12\cdot\alpha\cdot\beta}\begin{pmatrix} 2\cdot\alpha & -8 \\ 0 & -6\cdot\beta \end{pmatrix}.$$

5/c. Határozza meg az *(10 p.)*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \mapsto \sin(\alpha x) + x + \mathrm{e}^{\beta xy}$$

függvény $a = (0, 0)$ pontbeli másodfokú Taylor-polinomját.

Megoldás.

Mivel $f(a) = 1$ és a nem nulla parciális deriváltak $(\partial_1 f)(a) = \alpha + 1$, $(\partial_{12} f)(a) = \beta$, $(\partial_{111} f)(a) = -\alpha^3$, ezért

$$(T^f_{3,a})(x, y) = 1 + (\alpha + 1)x + \beta xy - \frac{\alpha^3}{6}x^3.$$

6/a. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \mathrm{e}^{\alpha(x^2+y^2)}$ és $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq \beta,\ 0 \leq x\}$. Határozza meg a $\int_T f$ integrál értékét. *(8 p.)*

Megoldás.

$$\int_T f = \int_0^{\sqrt{\beta}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{\alpha r^2}\, r \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\, r = \frac{\pi}{2 \cdot \alpha} \cdot \left(\mathrm{e}^{\alpha \cdot \beta} - 1\right)$$

6/b. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$ és $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq \beta,\ x \leq y\}$. Határozza meg a $\int_T f$ integrál értékét. *(8 p.)*

Megoldás.

$$\int_T f = \int_0^{\sqrt{\beta}} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} r^{2\cdot\alpha+1} \,\mathrm{d}\,\varphi \,\mathrm{d}\, r = \frac{\pi \beta^{\alpha+1}}{2 \cdot (\alpha + 1)}$$

6/c. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1$ és $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{x^2+y^2}{2} \leq \alpha x\right\}$. Határozza meg a $\int_T f$ integrál értékét. *(8 p.)*

Megoldás.

Az $(\alpha, 0)$ középpontú α sugarú kör területe a kérdés, ami

$$\int_T f = \alpha^2 \pi.$$