Kalkulus 2.
1. Zárthelyi dolgozat
2021. 4. 9. 8.15-10.00

(6 p.)

1/a. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon az alábbi halmazt.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq 0,\ x^2 + y^2 < \alpha\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 |\ -\beta \leq x \leq \beta\}$$

Határozza meg az A halmaz belsejét, torlódási pontjai és lezártját.

Megoldás.

$\text{Int}\, A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x < 0,\ x^2 + y^2 < \alpha\}$

Torlódási pontok halmaza $= \overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq 0,\ x^2 + y^2 \leq \alpha\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 |\ -\beta \leq x \leq \beta\}$.

(6 p.)

1/b. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon az alábbi halmazt.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 |\ \alpha < x < \alpha + \beta,\ |y| < x^2\}$$

Határozza meg az A halmaz belsejét, torlódási pontjai és lezártját.

Megoldás.

$\text{Int}\, A = \emptyset$

Torlódási pontok halmaza $= \overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \alpha \leq x \leq \alpha + \beta,\ |y| \leq x^2\}$.

(6 p.)

1/c. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ síkon az alábbi halmazt.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \alpha < x^2 + y^2 \leq \alpha + \beta\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 0, x \in \mathbb{Q}\}$$

Határozza meg az A halmaz belsejét, torlódási pontjai és lezártját.

Megoldás.

$\text{Int}\, A = A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \alpha < x^2 + y^2 < \alpha + \beta\}$

Torlódási pontok halmaza $= \overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \alpha \leq x^2 + y^2 \leq \alpha + \beta\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 0\}$.

(8 p.)

2/a. Határozza meg a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^2 y + \beta y^2}{x^4 + y^2}$$

határértéket, amennyiben létezik.

Megoldás.

Az $y = cx^2$ parabolák mentén nézve a határértéket $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha c x^4 + \beta c^2 x^4}{x^4 + c^2 x^4} = \dfrac{\alpha c + \beta c^2}{1 + c^2}$ adódik, ami függ a c értékétől, ezért nem létezik a keresett határérték.

(8 p.)

2/b. Határozza meg a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{2\beta} y + \sin(x^2 + y^2)^{\alpha}}{(x^2 + y^2)^{\beta}}$$

határértéket, amennyiben létezik.

Megoldás.

Polárkoordinátákat használva

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{2\beta+1} \sin\varphi \cos^{2\beta}\varphi + \sin(r^{2\alpha})}{r^{2\beta}} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^{2\alpha})}{r^{2\beta}} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \alpha > \beta; \\ 1, & \text{ha} \quad \alpha = \beta; \\ \infty, & \text{ha} \quad \alpha < \beta \end{cases}$$

adódik.

3. $(\alpha > 1)$ Tekintsük az *(18 p.)*

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad (x,y)\mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)^{\alpha/2}\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\beta/2}}, & \text{ha} \quad (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

függvényt.

a.) Számolja ki a $\partial_1 f$ és a $\partial_2 f$ mennyiséget, ahol azok léteznek.

b.) Igazolja, hogy f függvény folytonosan differenciálható az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ halmazon.

c.) Folytonosak-e a parciális deriváltak az origóban?

d.) A differenciálhatóság definíciója alapján döntse el, hogy az f függvény differenciálható-e az origóban.

Megoldás.

a.) Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor

$$(\partial_1 f)(x,y) = \alpha x(x^2+y^2)^{\alpha/2-1}\sin\frac{1}{(x^2+y^2)^{\beta/2}} - \beta x(x^2+y^2)^{(\alpha-\beta)/2-1}\cos\frac{1}{(x^2+y^2)^{\beta/2}},$$

az origóban pedig

$$(\partial_1 f)(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^\alpha \sin\frac{1}{|h|^\beta}}{h} = 0.$$

A $\partial_2 f$ a $\partial_1 f$ függvényből az x, y változók cseréjével megkapható.

b.) A parciális deriváltak mind folytonos függvények az $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ nyílt halmazon, hiszen ott folytonos függvények kompozíciójaként előállnak. Ezért, ezen nyílt halmazon a függvény folytonosan differenciálható.

c.) Mivel változóiban szimmetrikus a függvény, ezért elég az egyik $(\partial_1 f)$ parciális deriváltat vizsgálni. Pontosan akkor folytonos a $\partial_1 f$ parciális deriváltak az origóban, ha $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\partial_1 f)(x,y) = (\partial_1 f)(0,0)$ teljesül. A határértékre

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\partial_1 f)(x,y) &= \lim_{r\to 0+}\alpha\cos(\varphi)r^{\alpha-1}\sin\frac{1}{r^\beta} - \beta\cos(\varphi)r^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{r^\beta} \\ &= -\beta\cos(\varphi)\lim_{r\to 0+} r^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{r^\beta} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \alpha>\beta+1; \\ \nexists, & \text{ha} \quad \alpha\leq\beta+1 \end{cases}\end{aligned}$$

adódik. Tehát pontosan az $\alpha>\beta+1$ esetben folytonosak a parciális deriváltak.

d.) Ha differenciálható a függvény az origóban, akkor ott a deriváltja csak az $A=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ leképezés lehet. Mivel

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-A(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{r\to 0+}\frac{r^\alpha\sin\frac{1}{r^\beta}}{r} = 0,$$

ezért a függvény differenciálható az origóban.

4/a. Határozza meg az *(8 p.)*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \alpha x \le y \le (\alpha+\beta)x,\ y \le x^2 \le 2y\}$$

halmaz területét.

Megoldás.

Az $u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{x^2}{y}$, koordinátákkal $x = uv$ és $y = u^2 v$. A Jacobi-determináns

$$J = \left|\det\begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} v & u \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}\right| = u^2 v.$$

Ezért a terület

$$T = \int_\alpha^{\alpha+\beta}\int_1^2 1 \cdot u^2 v \,\mathrm{d}\, v \,\mathrm{d}\, u = \frac{(\alpha+\beta)^3 - \alpha^3}{2}.$$

4/b. Határozza meg az *(8 p.)*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{\alpha}{x} \le y \le \frac{\alpha+\beta}{x},\ \mathrm{e}^\alpha x \le y \le \mathrm{e}^{\alpha+\beta} x\right\}$$

halmaz területét.

Megoldás.

Az $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ koordinátákkal $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ és $y = \sqrt{uv}$. A Jacobi-determináns

$$J = \left|\det\begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-1}{2} \cdot \sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2v}.$$

Ezért a terület

$$T = \int_\alpha^{\alpha+\beta}\int_{\mathrm{e}^\alpha}^{\mathrm{e}^{\alpha+\beta}} 1 \cdot \frac{1}{2v} \,\mathrm{d}\, v \,\mathrm{d}\, u = \frac{\beta^2}{2}.$$

4/c. Határozza meg az *(8 p.)*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \le 2\alpha y,\ y \le x\}$$

halmaz területét.

Megoldás.

Polárkoordinátákkal

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\alpha\sin\varphi} 1 \cdot r \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\, \varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\alpha^2 \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\, \varphi = \frac{\alpha^2}{4}(\pi - 2).$$

5/a. Legyen $p \in [1, \infty[$ paraméter és tekintsük az $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^2$ halmazok szorzatán értelmezett *(10 p.)*

$$f : E \times F \to \mathbb{R}^2 \qquad ((x,y),(u,v)) \mapsto \begin{pmatrix} u^3 + \alpha x u + v^2 y \\ u^p + x^2 v^2 \end{pmatrix}$$

függvényt, valamint az $a_1 = (1,2) \in E$ és a $a_2 = (1,1) \in F$ pontokat.

a.) Az implicitfüggvény-tétel alapján a p paraméter mely értékei esetén létezik olyan $\varphi : E \to F$ függvény, mely az a pont egy környezetén értelmezett, $\varphi(a_1) = a_2$ és minden $z \in \operatorname{Dom} \varphi$ pontra $f(z, \varphi(z)) = f(a_1, a_2)$ teljesül?

b.) A $p = 1$ esetben határozza meg a $(\mathrm{D}\,\varphi)(a_1)$ deriváltat.

Megoldás.

a.) Az f függvény folytonosan deriválható és

$$A = (\partial_2 f)(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 3u^2 + \alpha x & 2vy \\ p u^{p-1} & 2x^2 v \end{pmatrix} \Big|_{x=u=v=1, y=2} = \begin{pmatrix} 3+\alpha & 4 \\ p & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det A = 6 + 2\alpha - 4p$, ezért pontosan akkor létezik a feladatban kérdezett implicitfüggvény, ha $p \neq \dfrac{3+\alpha}{2}$.

b.) Az első változó szerinti derivált

$$B = (\partial_1 f)(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \alpha u & v^2 \\ 2xv^2 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{x=u=v=1, y=2} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$(\mathrm{D}\,\varphi)(a_1) = -((\partial_2 f)(a_1,a_2))^{-1} (\partial_1 f)(a_1, a_2) = A^{-1} B = \begin{pmatrix} 3+\alpha & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2+2\alpha} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2+2\alpha} \begin{pmatrix} 2\alpha - 8 & 2 \\ \alpha + 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

5/b. Tekintsük az *(10 p.)*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) = \begin{pmatrix} y^3 + y^2 + pz \\ \alpha y^2 + 2\alpha z \\ xy + z^2 \end{pmatrix}$$

függvényt, ahol $p \in \mathbb{R}$ paraméter, valamint az $a = (1,1,2) \in \mathbb{R}^3$ pontot.

a.) Az inverfüggvény-tétel alapján a p paraméter mely értékei esetén létezik olyan $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény, mely az $f(a)$ pont egy környezetén értelmezett, $\varphi(f(a)) = a$ és minden $z \in \operatorname{Dom} \varphi$ pontra $f(\varphi(z)) = z$ teljesül?

b.) A $p = 0$ esetben, határozza meg a $(\mathrm{D}\,\varphi)(f(a))$ deriváltat.

Megoldás.

a.) Az f függvény deriváltja

$$(\mathrm{D}\,f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 3y^2 + 2y & p \\ 0 & 2\alpha y & 2\alpha \\ y & x & 2z \end{pmatrix}$$

az a pontban pedig

$$A = (\mathrm{D}\,f)(a) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & p \\ 0 & 2\alpha & 2\alpha \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Mivel az f függvény folytonosan differenciálható és $\det A = 2\alpha(5 - p)$, ezért az f függvénynek létezik differenciálható inverze, ha $p \neq 5$.

b.) Mivel $(\mathrm{D}\,\varphi)(f(a)) = ((\mathrm{D}\,f)(a))^{-1}$, ezért

$$(\mathrm{D}\,\varphi)(f(a)) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 2\alpha \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10\alpha} \begin{pmatrix} 6\alpha & -20 & 10\alpha \\ 2\alpha & 0 & 0 \\ -2\alpha & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

5/c. Tekintsük az $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z,v)=x^2+y^2+z^2+\alpha v^2$ függvényt és a *(10 p.)*

$$H=\left\{(x,y,z,v)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+\alpha v=\alpha^2+\alpha+2, -x-y+z+\alpha v=\alpha^2+\alpha-2\right\}$$

halmazt. Határozza meg az $f|_H$ függvény maximális és minimális értékét, ha azok léteznek.

Megoldás.

Definiáljuk az alábbi $g_1, g_2:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ függvényeket.

$$g_1(x,y,z,v)=x+y+z+\alpha v-\alpha^2-\alpha-2 \qquad g_2(x,y,z,v)=-x-y+z+\alpha v-\alpha^2-\alpha+2$$

Mivel f, g_1 és g_2 folyotnosan differenciálható, valamint minden $a\in\mathbb{R}^4$ esetén $(\mathrm{D}\,g_1)(a)$ és $(\mathrm{D}\,g_2)(a)$ lineárisan független, ezért ha az $f|_H$ függvénynek szélsőértéke van az $a\in H$ pontban, akkor létezik olyan $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, melyre

$$(\mathrm{D}\,f)(a)=\lambda_1(\mathrm{D}\,g_1)(a)+\lambda_2(\mathrm{D}\,g_2)(a)$$

teljesül, azaz $a=(x,y,z,v)$ esetén

$$\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z & 2\alpha v\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & \alpha\end{pmatrix}.$$

Ebből $x=y$ és $z=v$ adódik, ezek után a $g_1(a)=g_2(a)=0$ feltételekből pedig $x=1$ és $z=\alpha$. Tehát a függvénynek csak az $a=(1,1,\alpha,\alpha)$ pontban lehet szélsőértéke. Ez szigorú lokális minimum, ugyanis minden $t\in\mathbb{R}$ esetén $\gamma(t)=(2,2-t,\alpha,\alpha)\in H$ és $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(\gamma(t))=\infty$.

6/a. Határozza meg az $\displaystyle\int\limits_0^\alpha\int\limits_x^\alpha \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$ integrál értékét. *(10 p.)*

Megoldás.

$$\int\limits_0^\alpha\int\limits_x^\alpha \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x=\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^y \mathrm{e}^{x/y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int\limits_0^\alpha(\mathrm{e}-1)y\,\mathrm{d}\,y=(\mathrm{e}-1)\cdot\frac{\alpha^2}{2}$$

6/b. Határozza meg az $\displaystyle\int\limits_0^1\int\limits_{\alpha y}^\alpha \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ integrál értékét. *(10 p.)*

Megoldás.

$$\int\limits_0^1\int\limits_{\alpha y}^\alpha \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^{\frac{x}{\alpha}} \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x=\int\limits_0^\alpha\frac{x}{a}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,x=\frac{\mathrm{e}^{\alpha^2}-1}{2\alpha}$$

6/c. Határozza meg az $\displaystyle\int\limits_0^{\alpha c}\int\limits_{y/\alpha}^c \cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ integrál értékét, ahol $c=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. *(10 p.)*

Megoldás.

$$\int\limits_0^{\alpha c}\int\limits_{y/\alpha}^c \cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\int\limits_0^c\int\limits_0^{\alpha x}\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x=\int\limits_0^c\alpha x\cos(x^2)\,\mathrm{d}\,x=\frac{\alpha}{2}$$