Kalkulus 2.

2. Pótzárthelyi dolgozat

2021. 5. 21. 9.15-11.00

(12 p.)

1/a. Legyen F annak az egyeneskúpnak a palástja, melynek csúcsa a $(0,0,\beta)$ pont, alapköre pedig a $z=0$ síkban lévő $x^2+y^2=\alpha^2$ kör; az F feület irányítsuk úgy, hogy az n normálvektorára $\langle n,(0,0,1)\rangle \geq 0$ teljesüljön. Tekintsük a

$$v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \qquad v(x,y,z)=(x^2+\alpha x, \alpha y+\beta y^2, \sqrt{x^2+y^2})$$

vektormezőt. Határozza meg az $\displaystyle\iint_F v$ integrál értékét.

Megoldás.
A palást paraméterezése

$$p:[0,\alpha]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3 \qquad (r,\varphi)\mapsto\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \beta-\frac{\beta}{\alpha}r\right).$$

A paraméterezéshez tartozó normálvektor

$$n(r,\varphi)=\left(\frac{\beta}{\alpha}r\cos\varphi, \frac{\beta}{\alpha}r\sin\varphi, r\right).$$

Ezek alapján a keresett integrál az alábbi.

$$\iint_F v=\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\left\langle (r^2\cos^2\varphi+\alpha r\cos\varphi, \alpha r\sin\varphi+\beta r^2\sin^2\varphi, r), \left(\frac{\beta}{\alpha}r\cos\varphi, \frac{\beta}{\alpha}r\sin\varphi, r\right)\right\rangle \mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r=$$
$$=\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\frac{\beta}{\alpha}r^3\cos^3\varphi+\beta r^2\cos^2\varphi+\beta r^2\sin^2\varphi+\frac{\beta^2}{\alpha}r^3\sin^3\varphi+r^2\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r=$$
$$=\int_0^\alpha 2\pi\beta r^2+2\pi r^2\,\mathrm{d}\,r=\frac{2\pi(1+\beta)\alpha^3}{3}$$

(12 p.)

1/b. Legyen F annak az egyeneskúpnak a palástja, melynek csúcsa a $(0,0,0)$ pont, alapköre pedig a $z=\beta$ síkban lévő $x^2+y^2=\alpha^2$ kör; az F feület irányítsuk úgy, hogy az n normálvektorára $\langle n,(0,0,1)\rangle \leq 0$ teljesüljön. Tekintsük a

$$v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 \qquad v(x,y,z)=(x^2+\alpha x, \alpha y+\beta y^2, \sqrt{x^2+y^2})$$

vektormezőt. Határozza meg az $\displaystyle\iint_F v$ integrál értékét.

Megoldás.
A palást paraméterezése

$$p:[0,\alpha]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3 \qquad (r,\varphi)\mapsto\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \frac{\beta}{\alpha}r\right).$$

A paraméterezéshez tartozó normálvektor

$$n(r,\varphi)=\left(\frac{\beta}{\alpha}r\cos\varphi, \frac{\beta}{\alpha}r\sin\varphi, -r\right).$$

Ezek alapján a keresett integrál az alábbi.

$$\iint_F v=\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\left\langle (r^2\cos^2\varphi+\alpha r\cos\varphi, \alpha r\sin\varphi+\beta r^2\sin^2\varphi, r), \left(\frac{\beta}{\alpha}r\cos\varphi, \frac{\beta}{\alpha}r\sin\varphi, -r\right)\right\rangle \mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r=$$
$$=\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\frac{\beta}{\alpha}r^3\cos^3\varphi+\beta r^2\cos^2\varphi+\beta r^2\sin^2\varphi+\frac{\beta^2}{\alpha}r^3\sin^3\varphi-r^2\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,r=$$
$$=\int_0^\alpha 2\pi\beta r^2-2\pi r^2\,\mathrm{d}\,r=\frac{2\pi(\beta-1)\alpha^3}{3}$$

(8 p.)

2/a. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(r)=\mathrm{e}^{-\alpha\|r\|}$, ahol $r=(x,y,z)$ és $\|r\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, valamint adott $a\in\mathbb{R}^3$ vektor esetén tekintsük a $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v(r)=a\times r$ vektormezőt.

a.) Adott $r\in\mathbb{R}^3$ esetén határozza meg $\dfrac{(\Delta f)(r)}{f(r)}+\dfrac{2\cdot\alpha}{\|r\|}$ értékét. ($\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$)

b.) Határozza meg a $\operatorname{rot} v$ függvényt.

Megoldás.

a.) Mivel $(\Delta f)(r)=\alpha f(r)\left(\alpha-\dfrac{2}{\|r\|}\right)$, ezért $\dfrac{(\Delta f)(r)}{f(r)}+\dfrac{2\cdot\alpha}{\|r\|}=\alpha^2$.

b.) $(\operatorname{rot} v)(r)=2a$

(8 p.)

2/b. Legyen $f:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(r)=\log\|r\|^\alpha$, ahol $r=(x,y,z)$ és $\|r\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, valamint adott $a\in\mathbb{R}^3$ vektor esetén tekintsük a $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v(r)=\|r\|^2 a$ vektormezőt.

a.) Adott $r\in\mathbb{R}^3$ esetén határozza meg $\|r\|^2(\Delta f)(r)$ értékét. ($\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$)

b.) Határozza meg a $\operatorname{rot} v$ függvényt.

Megoldás.

a.) Mivel $(\Delta f)(r)=\dfrac{\alpha}{\|r\|^2}$, ezért $\|r\|^2(\Delta f)(r)=\alpha$.

b.) $(\operatorname{rot} v)(r)=2r\times a$

(5 p.)

3/a. Legyen a Γ görbe paraméterezése $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$, $\gamma(t)=(\alpha\sin(t),\beta\cos(t),\alpha t(2\pi-t))$ és tekintsük a $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v(x,y,z)=\left(\beta x^{\beta-1}y^2-\alpha z\,\mathrm{e}^{-\alpha xz},2x^\beta y+\dfrac{2y}{1+y^4},-\alpha x\,\mathrm{e}^{-\alpha xz}\right)$ vektormezőt. Határozza meg a $\displaystyle\int_\gamma v$ integrál értékét! (Vizsgálja meg, hogy tényleg kell-e integrálni!)

Megoldás.

Mivel v mindenhol értelmezett örvénymentes vektormező, ezért potenciálos. Potenciálos vektormező zárt görbe menti integrálja mindig 0, ezért $\displaystyle\int_\gamma v=0$.

(5 p.)

3/b. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha x}{y^{14}+\beta}\right)}{1+\log^2(z^2+\mathrm{e}^{x^2+y})}\cdot\sin(\alpha x^\beta+yz)$. Határozza meg a $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$ függvényt! (Gondolja meg, hogy tényleg kell-e sokat deriválni!)

Megoldás.

Mivel f mindenhol értelmezett sima függvények kompozíciója, így f mindenhol kétszer (sőt végtelenszer is) differenciáljató. A Young-tétel miatt, ezért $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f=0$.

(10 p.)

4/a. Minden $n\in\mathbb{N}^+$ és $x\in\mathbb{R}$ esetén legyen $f_n(x)=\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x}}{n^2}$.

a.) Jelölje H azon $x\in\mathbb{R}$ értékek halmazát, amelyekre a $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ sor konvergens. Adja meg a H halmazt. (*3 p.*)

b.) Minden $x\in H$ esetén legyen $F(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$. Igazolja, hogy minden $x\in H\cap\mathbb{R}^+$ esetén

$$F'(x)=\sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-\alpha n^2 x}\left(\frac{1}{n^2}-\alpha x\right)$$

teljesül. (*7 p.*)

Megoldás.

a.) Ha $x>0$, akkor $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty|f_n(x)|\le x\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}<\infty$, vagyis a sor abszolút konvergens, és ezért konvergens is. Tehát $\mathbb{R}^+\subseteq H$. Ha $x<0$, akkor $q=\mathrm{e}^{-\alpha x}>1$, valamint $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{n}=\infty$ miatt $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)\neq 0$, vagyis nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Ha $x = 0$, akkor nyilván konvergens a sor, tehát $0 \in H$. Ezek alapján $H = [0, \infty[$.

b.) Vizsgáljuk a függvénysort a $H' =]0, \infty[$ halmazon. Itt mindegyik függvény differenciálható és a függvénysor konvergens. Megmutatjuk, hogy a $\sum_n f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens ezen a halmazon, amiből következik a bizonyítandó állítás.

Keressük meg az $f_n'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x}(1 - \alpha x n^2)}{n^2}$ függvény szélsőértékeit a H' halmazon. Az

$$f_n''(x) = \frac{\alpha n^2 \,\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x}(-2 + \alpha x n^2)}{n^2}$$

egyenletből leolvasható, hogy az f_n' függvény monoton csökkenő a $\left[0, \dfrac{2}{\alpha n^2}\right]$ intervallumon és monoton növő a $\left[\dfrac{2}{\alpha n^2}, \infty\right[$ halmazon. Mivel $\lim\limits_{x\to 0} f_n'(x) = \dfrac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n'(x) = 0$ és $f_n'\left(\dfrac{2}{\alpha n^2}\right) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in H'} \left| \frac{\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x}(1 - \alpha x n^2)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

A Weierstrass-tétel értelmében ebből következik a $\sum_n f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergenciája.

(10 p.)

4/b. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x^2}}{n^3}$.

a.) Jelölje H azon $x \in \mathbb{R}$ értékek halmazát, amelyekre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor konvergens. Adja meg a H halmazt. (*3 p.*)

b.) Minden $x \in H$ esetén legyen $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Igazolja, hogy minden $x \in H$ esetén

$$F'(x) = -2 \cdot \alpha x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x^2}}{n}$$

teljesül. (*7 p.*)

Megoldás.

a.) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3} < \infty$, vagyis a sor abszolút konvergens, és ezért konvergens is. Tehát $\mathbb{R} = H$.

b.) Vizsgáljuk a függvénysort a $H' =]0, \infty[$ halmazon. Itt mindegyik függvény differenciálható és a függvénysor konvergens. Megmutatjuk, hogy a $\sum_n f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens ezen a halmazon, amiből következik a bizonyítandó állítás.

Keressük meg az $f_n'(x) = -2 \cdot \alpha x \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x^2}}{n}$ függvény szélsőértékeit a H' halmazon. Az

$$f_n''(x) = 2 \cdot \alpha \frac{\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x^2}}{n}(2 \cdot \alpha n^2 x^2 - 1)$$

egyenletből leolvasható, hogy az f_n' függvény monoton csökkenő a $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \alpha} n}\right]$ intervallumon és monoton növő a $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \alpha} n}, \infty\right[$ halmazon. Mivel $\lim\limits_{x\to 0} f_n'(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n'(x) = 0$ és $f_n'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \alpha} n}\right) = \dfrac{-\sqrt{2 \cdot \alpha}\,\mathrm{e}^{-1/2}}{n^2}$, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in H'} \left| -2 \cdot \alpha x \frac{\mathrm{e}^{-\alpha n^2 x^2}}{n} \right| = \sqrt{2 \cdot \alpha}\,\mathrm{e}^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

A Weierstrass-tétel értelmében ebből következik a $\sum_n f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergenciája.

5/a. Tekintsük az $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$ függvényt. *(15 p.)*

a.) Írja fel az f függvény 0 pont körüli Taylor-sorfejtését. (*4 p.*)

b.) Írja fel a $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorfejtését és mutassa meg, hogy a Taylor-sor a $]-1,1[$ intervallumon előállítja a függvényt. (*7 p.*)

c.) Határozza meg a $g^{(101)}(0)$ értékét, azaz a függvény 101. deriváltjának az értékét a 0 pontban. (*4 p.*)

Megoldás.

a.) $T(x) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{-x^2}{\alpha^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^n}{\alpha^{2n+1}}x^{2n}$

b.) A binomiális sor olyan hatványsor, melynek a konvergenciasugara 1. Ezért a $]-1,1[$ halmaz minden zárt részintervallumán az integrálás felcserélhető a szummával. Mivel minden $x \in]-1,1[$ esetén $g'(x) = f(x)$, ezért létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy minden $t \in]-1,1[$ esetén

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}\,x + C$$

teljesül. A $t = 0$ érték behelyettesítéséből $C = 0$ adódik, tehát

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^n}{\alpha^{2n+1}}x^{2n}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^n}{\alpha^{2n+1}}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

c.) A Taylor-sorfejtésből adódóan

$$g^{(101)}(0) = \binom{-1/2}{50}\frac{100!}{\alpha^{101}}.$$

(15 p.)

5/b. Tekintsük az $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\alpha^2 + x^2}$ függvényt.

a.) Írja fel az f függvény 0 pont körüli Taylor-sorfejtését. (*4 p.*)

b.) Írja fel a $g :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorfejtését és mutassa meg, hogy a Taylor-sor a $]-1,1[$ intervallumon előállítja a függvényt. (*7 p.*)

c.) Határozza meg a $g^{(101)}(0)$ értékét, azaz a függvény 101. deriváltjának az értékét a 0 pontban. (*4 p.*)

Megoldás.

a.) $T(x) = \frac{1}{\alpha^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\frac{1}{\alpha^{2n+2}}x^{2n}$

b.) A binomiális sor olyan hatványsor, melynek a konvergenciasugara 1. Ezért a $]-1,1[$ halmaz minden zárt részintervallumán az integrálás felcserélhető a szummával. Mivel minden $x \in]-1,1[$ esetén $g'(x) = f(x)$, ezért létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy minden $t \in]-1,1[$ esetén

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}\,x + C$$

teljesül. A $t = 0$ érték behelyettesítéséből $C = 0$ adódik, tehát

$$g(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\frac{1}{\alpha^{2n+2}}x^{2n}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\frac{1}{\alpha^{2n+2}}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

c.) A Taylor-sorfejtésből adódóan

$$g^{(101)}(0) = \binom{-1}{50}\frac{100!}{\alpha^{102}}.$$