Kalkulus 2.

2. Zárthelyi dolgozat

2021. 5. 14. 10.15-12.00

(10 p.)

1/a. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\alpha x+3z$, valamint

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha x^2+\beta y^2\le z\le 6-\sqrt{\alpha x^2+\beta y^2}\right\}.$$

Határozza meg az $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f$ integrál értékét.

Megoldás.

Alkalmazzuk az $x=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}r\cos\varphi$ és $y=\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}r\sin\varphi$ helyettesítést. A megadott tartományra vonatkozó egyenlőtlenség ekkor $r^2\le z\le 6-r$. A $0\le r$ és az $r^2\le 6-r$ egyenlőtlenségek miatt $r\in[0,2]$. A keresett integrál az alábbi.

$$\iiint\limits_{\Omega} f=\int_0^2\int_{r^2}^{6-r}\int_0^{2\pi}(\sqrt{\alpha}r\cos\varphi+3z)\frac{r}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,r=\frac{3\pi}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}\int_0^2 r((6-r)^2-r^4)\,\mathrm{d}\,r=\frac{50\pi}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}$$

(10 p.)

1/b. Legyen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\beta y+3z$, valamint

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{\alpha x^2+\beta y^2}\le z\le 6-\alpha x^2-\beta y^2\right\}.$$

Határozza meg az $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f$ integrál értékét.

Megoldás.

Alkalmazzuk az $x=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}r\cos\varphi$ és $y=\dfrac{1}{\sqrt{\beta}}r\sin\varphi$ helyettesítést. A megadott tartományra vonatkozó egyenlőtlenség ekkor $r\le z\le 6-r^2$. A $0\le r$ és az $r\le 6-r^2$ egyenlőtlenségek miatt $r\in[0,2]$. A keresett integrál az alábbi.

$$\iiint\limits_{\Omega} f=\int_0^2\int_{r}^{6-r^2}\int_0^{2\pi}(\sqrt{\alpha}r\sin\varphi+3z)\frac{r}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}\,\mathrm{d}\,\varphi\,\mathrm{d}\,z\,\mathrm{d}\,r=\frac{3\pi}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}\int_0^2 r((6-r^2)^2-r^2)\,\mathrm{d}\,r=\frac{92\pi}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}$$

(10 p.)

2/a. Legyen $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v(x,y,z)=\left(\alpha y^2+2xz, pxy+\beta z^2\,\mathrm{e}^{\beta y}, x^2+2z\,\mathrm{e}^{\beta y}\right)$, ahol $p\in\mathbb{R}$ paraméter.

a.) Határozza meg a $\operatorname{div} v$ függvényt. (*2 p.*)

b.) Határozza meg a $\operatorname{rot} v$ függvényt. (*3 p.*)

c.) A p paraméter mely p_0 értéke mellett lesz a v vektormező potenciálos? (*2 p.*)

d.) A $p=p_0$ érték mellett határozza meg a vektormező azon $U:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ potenciálját, melyre $U(0,0,0)=0$ teljesül. (*3 p.*)

Megoldás.

a.) $(\operatorname{div} v)(x,y,z)=2z+px+\beta^2z^2\,\mathrm{e}^{\beta y}+2\,\mathrm{e}^{\beta y}$

b.) $(\operatorname{rot} v)(x,y,z)=(0,0,y(p-2\cdot\alpha))$

c.) Mivel $\operatorname{Dom} v$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, ezért $\operatorname{rot} v=0$ esetén létezik potenciál, vagyis $p_0=2\cdot\alpha$.

d.) $U(x,y,z)=\alpha xy^2+x^2z+z^2\,\mathrm{e}^{\beta y}$

(10 p.)

2/b. Legyen $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $v(x,y,z)=\left(3\cdot\alpha x^2+\beta pxy, \beta x^2-z\sin(yz), -y\sin(yz)\right)$, ahol $p\in\mathbb{R}$ paraméter.

a.) Határozza meg a $\operatorname{div} v$ függvényt. (*2 p.*)

b.) Határozza meg a $\operatorname{rot} v$ függvényt. (*3 p.*)

c.) A p paraméter mely p_0 értéke mellett lesz a v vektormező potenciálos? (*2 p.*)

d.) A $p = p_0$ érték mellett határozza meg a vektormező azon $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ potenciálját, melyre $U(0,0,0) = 0$ teljesül. (*3 p.*)

Megoldás.
a.) $(\operatorname{div} v)(x,y,z) = 6 \cdot \alpha x + \beta p y - z^2 \cos(zy) - y^2 \cos(yz)$
b.) $(\operatorname{rot} v)(x,y,z) = (0, 0, \beta x(2-p))$
c.) Mivel $\operatorname{Dom} v$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, ezért $\operatorname{rot} v = 0$ esetén létezik potenciál, vagyis $p_0 = 2$.
d.) $U(x,y,z) = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \cos(yz) - 1$

(*10 p.*)

3/a. A γ görbe legyen a $z = 0$ síkban fekvő $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ egyenletű ellipszis, pozitív irányítással. Tekintsük a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = \left(\operatorname{arctg}(x^2+z) - \beta y^3, \alpha x^3 + 3^{\sin(yz)}, \dfrac{17x^2+y}{11+z^4}\right)$ vektormezőt. Határozza meg a $\displaystyle\oint_\gamma v$ integrál értékét! (Gauß, Stokes vagy Остроградский segíthet!)

Megoldás.
Legyen F a $z = 0$ síkban fekvő $\alpha x^2 + \beta y^2 \leq 1$ felület, olyan irányítással, hogy az n normálvektorára $\langle n, (0,0,1)\rangle \geq 0$ teljesüljön. Ekkor a Stokes-tétel értelmében $\displaystyle\iint_F \operatorname{rot} v = \oint_\gamma v$ teljesül. A felület egy paraméterezése $p : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $p(r,\varphi) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} r \cos\varphi, \dfrac{1}{\sqrt{\beta}} r \sin\varphi, 0\right)$. A felület normálvektora

$$n(r,\varphi) = (\partial_1 p)(r,\varphi) \times (\partial_2 p)(r,\varphi) = \left(0, 0, \frac{r}{\sqrt{\alpha \cdot \beta}}\right).$$

A felületi integrálhoz elég a $\operatorname{rot} v$ vektor 3. komponensét meghatározni, ami

$$(\operatorname{rot} v)(x,y,z)_3 = 3 \cdot \alpha x^2 + 3 \cdot \beta y^2.$$

Ezek alapján

$$\oint_\gamma v = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{\alpha \cdot \beta}} \cdot 3r^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d} r = \frac{3\pi}{2\sqrt{\alpha \cdot \beta}}.$$

(*10 p.*)

3/b. Az F felület legyen az $\alpha x^2 + \beta y^2 + z^2 = 1$ ellipszoid $0 \leq z$ része olyan irányítással, hogy az n normálvektorára $\langle n, (0,0,1)\rangle \geq 0$ teljesüljön. Tekintsük a $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x,y,z) = \left(\operatorname{arctg}(y^2 - 2z) + \alpha x z, \beta y z + 2^{\cos(x+z)}, \alpha z^2\right)$ vektormezőt. Határozza meg a $\displaystyle\iint_F v$ integrál értékét! (Gauß, Stokes vagy Остроградский segíthet!)
Megoldás.
Legyen G a $z = 0$ síkban fekvő $\alpha x^2 + \beta y^2 \leq 1$ felület, olyan irányítással, hogy az n normálvektorára $\langle n, (0,0,1)\rangle \leq 0$ teljesüljön; valamint legyen $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, \alpha x^2 + \beta y^2 + z^2 \leq 1\right\}$ tartomány. Ekkor $\displaystyle\iint_F v + \iint_G v = \iiint_\Omega \operatorname{div} v$. Mivel a G felület normálvektora z-tengely irányú és a v vektormező 3. komponense a G felület pontjaiban 0, ezért $\displaystyle\iint_G v = 0$. A módosított $x = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} r \sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}} r \sin(\vartheta)\sin(\varphi)$, $z = r\cos(\vartheta)$ koordinátákat használva a keresett integrál az alábbi.

$$\iint_F v = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (3 \cdot \alpha + \beta) r \cos(\vartheta) \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha \cdot \beta}} r^2 \sin(\vartheta) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d} r = \frac{(3 \cdot \alpha + \beta)}{\sqrt{\alpha \cdot \beta}} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(3 \cdot \alpha + \beta)\pi}{4\sqrt{\alpha \cdot \beta}}$$

(*10 p.*)

4/a. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $t \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $f_n(t) = n\left(\ln\left(t + \dfrac{\alpha}{n}\right) - \ln(t)\right)$.

a.) Mutassa meg, hogy minden $t \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ határérték és adja meg az f függvényt. (*3 p.*)

b.) Igaz-e, hogy az $[1, \infty[$ halmazon az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez? (*4 p.*)

c.) Határozza meg $\lim_{n\to\infty} \int_1^\beta f_n(t)\,\mathrm{d}\,t$ értékét az f_n függvények integrálása nélkül. (*3 p.*)

Megoldás.

a.) Ha $t \in \mathbb{R}^+$, akkor ln függvény folytonossága miatt

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha/t}{n}\right)^n = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha/t}{n}\right)^n = \ln \mathrm{e}^{\alpha/t} = \frac{\alpha}{t}.$$

b.) Minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $t \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen $\rho_n(t) = f(t) - f_n(t)$. Ekkor

$$\rho'(t) = \frac{-\alpha}{t^2} - n\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha/t}{n}}\cdot\frac{(-\alpha)}{t^2 n} = \frac{\alpha}{t^2+\frac{\alpha t}{n}} - \frac{\alpha}{t^2} < 0$$

miatt a ρ_n függvény szigorúan monoton csökkenő. A $\lim_{t\to\infty}\rho_n(t) = 0$ és a $\rho_n(1) = \alpha - \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ értékek miatt

$$\sup_{t\in[1,\infty[} |f(t) - f_n(t)| = \alpha - \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n,$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[1,\infty[} |f(t) - f_n(t)| = 0$$

teljesül, ezért egyenletes a konvergencia.

c.) Az $[1,\beta]$ halmazon való egyenletes konvergencia miatt

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\beta f_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_1^\beta \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_1^\beta \frac{\alpha}{t}\,\mathrm{d}\,t = \alpha\ln\beta.$$

(*10 p.*)

4/b. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(\alpha n x)}{\beta^n}$.

a.) Mutassa meg, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ sor konvergens. (*3 p.*)

b.) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $F(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x)$. Mely $x \in \mathbb{R}$ értékek esetén differenciálható az F függvény? (*4 p.*)

c.) Határozza meg $F'(0)$ értékét. (*3 p.*)

Megoldás.

a.) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{n=0}^\infty \left|\frac{\operatorname{arctg}(\alpha n x)}{\beta^n}\right| \le \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{\beta}\right)^n < \infty$$

miatt a $\sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ sor abszolút konvergens, ezért konvergens is.

b.) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az f_n függvény differenciálható, létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}$ pont, ahol a $\sum_{n=0}^\infty f_n(x_0)$ sor konvergens, továbbá a $\sum_{n=0}^\infty f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens, ugyanis

$$\sum_{n=0}^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| = \sum_{n=0}^\infty \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\beta^n}\cdot\frac{\alpha n}{1+\alpha^2 n^2 x^2}\right| = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha n}{\beta^n} < \infty,$$

amiből a Weierstrass-tétel alapján következik az egyenletes konvergencia. Tehát az F függvény differenciálható az $\mathbb{R}$ halmazon.

c.) Az előző pont alapján

$$F'(0) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha n}{\beta^n} = \frac{\alpha}{\beta}\sum_{n=1}^\infty n\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-1} = \frac{\alpha}{\beta}\sum_{n=1}^\infty (t^n)'|_{t=\frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\sum_{n=1}^\infty t^n\right)'\Bigg|_{t=\frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{t}{1-t}\right)'\Bigg|_{t=\frac{1}{\beta}} =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)^2} = \frac{\alpha\cdot\beta}{(\beta-1)^2}.$$

5/a. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\alpha^2+x^2}$ függvényt. *(10 p.)*

a.) Írja fel az f függvény 0 pont körüli Taylor-sorfejtését. (*5 p.*)

b.) Határozza meg az $f^{(8)}(0)$ értékét, azaz a függvény 8. deriváltjának az értékét a 0 pontban. (*5 p.*)

Megoldás.

a.) Az $f(x)=\alpha\cdot\left(1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right)^{1/2}$ Taylor-sora $T(x)=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2n}$.

b.) A Taylor-sorfejtésre vonatkozó $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ képlet alapján

$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!}x^8=\alpha\binom{\frac{1}{2}}{4}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^8,$$

vagyis

$$f^{(8)}(0)=8!\cdot\alpha\cdot\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^8=-\frac{8!\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!\alpha^7}=-\frac{7!\cdot 5}{2^4\alpha^7}=-\frac{3^2 5^2 7}{\alpha^7}=-\frac{1575}{\alpha^7}.$$

5/b. Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$ függvényt. *(10 p.)*

a.) Írja fel az f függvény 0 pont körüli Taylor-sorfejtését. (*5 p.*)

b.) Határozza meg az $f^{(8)}(0)$ értékét, azaz a függvény 8. deriváltjának az értékét a 0 pontban. (*5 p.*)

Megoldás.

a.) Mivel $f(x)=\frac{1}{\alpha}\left(1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right)^{-1/2}$, ezért $T(x)=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2n}$.

b.) A Taylor-sorfejtésre vonatkozó $T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ képlet alapján

$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!}x^8=\frac{1}{\alpha}\binom{-\frac{1}{2}}{4}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^8,$$

vagyis

$$f^{(8)}(0)=\frac{8!}{\alpha}\cdot\frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{4!}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^8=\frac{8!3\cdot 5\cdot 7}{2^4 4!\alpha^9}=\frac{7!\cdot 5\cdot 7}{2^4\alpha^9}=\frac{105^2}{\alpha^9}.$$