

Számítási módszerek a fizikában 1, 3. hét

I. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

1. $\ln(e)$
2. $\ln(-3i)$
3. $\ln(-e^{i\pi})$
4. $\ln(1-i)$
5. $\ln(-1 + \sqrt{3}i)$

(Ha $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol $0 < |z|$ és $-\pi \leq \varphi < \pi$, akkor $\ln z = \ln |z| + i\varphi$.)

II. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

1. 2^{2i}
2. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}e\right)^{2i}$
3. i^{2i}
4. $\left(\frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{1+i}$

(Ha $z, v \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, akkor $z^v = e^{v \ln z}$.)

III. Milyen görbék határoznak meg a komplex számsíkon az alábbi egyenletek?

1. $|z - (1 + 2i)| = 3$,
2. $z + \bar{z} = z\bar{z}$,
3. $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4$.

IV. A komplex számtest felett oldjuk meg az egyenleteket.

1. $z^3 = \bar{z}$
2. $z^2 - 5(1+i)z + 13i = 0$
3. $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$
4. $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

V. Geometriai sor összegképletére visszavezethető feladatok.

1. Minden $n, k \in \mathbb{N}$ számra $n \neq 0, 1$ esetén legyen $z_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \text{ teljesül.}$$

2. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{C}$ esetén teljesülnek az alábbi formulák.

$$\sum_{k=0}^n \sin(a + kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right) \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin \frac{b}{2}} \quad \sum_{k=0}^n \cos(a + kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right) \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin \frac{b}{2}}$$

3. Számoljuk ki $\sum_{k=1}^{20} (1+i)^k$ értékét algebrai alakban.

VI. Komplex számokkal jól kezelhető geometria feladatok.

1. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyre az u, v, z pontok egyenlő oldalú háromszöget adnak meg. (Az $u = 2 + i$ és a $v = -1 + 3i$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
2. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyek az u és v csúcsponttal rendelkező négyzet középpontjai. (Az $u = 2 + i$ és a $v = -1 + 3i$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
3. Igazoljuk, hogy ha egy háromszög minden oldalára kifelé olyan szabályos háromszöget rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti háromszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új háromszögek középpontjai szabályos háromszöget határoznak meg.
4. Igazoljuk, hogy ha egy négyszög minden oldalára kifelé olyan négyzetet rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti négyszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új átellenes négyzetek középpontjai összekötő szakaszok merőlegesek egymásra és egyenlő a hosszuk.
5. Tekintsük komplex számsíkon az alábbi transzformációkat.

$R(\varphi)$: φ ($\varphi \in \mathbb{R}$) szöggel való elforgatás az origó körül pozitív irányba.

$L(v)$: v ($v \in \mathbb{C}$) vektorral való eltolás.

$M(\lambda)$: λ -val ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) való nyújtás.

Mely egyenletek teljesülnek az alábbiak közül minden $\varphi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén?

$$R(\varphi)L(v) = L(v)R(\varphi) \quad R(\varphi)M(\lambda) = M(\lambda)R(\varphi) \quad M(\lambda)L(v) = L(v)M(\lambda)$$

Hogyan írhatjuk le egyszerűbben az alábbi transzformációkat?

$$R(-\varphi)L(-v)R(\varphi)L(v) \quad M\left(\frac{1}{\lambda}\right)L(-v)M(\lambda)L(v) \quad L(-v e^{-i\varphi})R(-\varphi)L(v)R(\varphi)$$