Számítási módszerek a fizikában 1, 10. hét

I. A V vektorteret az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben az $(e_i)_{i\in I}$ bázisvektorokkal koordinátázzuk a $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben pedig az $(f_i)_{i\in I}$ bázisvektorokkal. Amennyiben a T lineáris leképzést a $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}$ mátrixszal reprezentáljuk az $\mathcal{A}$ koordinátarendszerben határozzuk meg T mátrixát $\mathcal{B}$ koordinátarendszerben az alábbi esetekben.

1. $V=\mathbb{R}^2$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $f_1=(1,1)$, $f_2=(1,2)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
2. $V=\mathbb{R}^2$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $f_1=(1,1)$, $f_2=(1,-1)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$
3. $V=\mathbb{R}^3$, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$, $f_1=(1,1,1)$, $f_2=(2,2,1)$, $f_3=(1,2,4)$, $T_{\mathcal{A}\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

A fenti példák alapján fogalmazzuk meg precízen és igazoljuk az *A determináns és a nyom bázisfüggetlen.* kijelentést.

II. Adjuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorai!

$$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}0 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}-2 & -8 & -12\\ 1 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

III. Tekintsük az

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -2\\ 3 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 10\end{pmatrix}$$

mátrixot.

1. Határozzuk meg a mátrix $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$, sajátértékeit és $(v_i)_{i=1,2,3}$ sajátvektorait.
2. Írjuk fel az A mátrixot
$$S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}S$$
alakban.
3. Minden v_i $(i=1,2,3)$ sajátvektorhoz határozzuk meg azt a P_i projekciót, mely az origón átmenő v_i irányvektorú egyenesre vetít merőlegesen.
4. Mutassuk meg, hogy
$$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3$$
teljesül.