Számítási módszerek a fizikában 1, 12. hét

I. Tekinstük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixokat, mint $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ lineáris leképezéseket. Számoljuk ki az $f(A), g(A)$ és az $f(B), g(B)$ mátrixot, ahol $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ és $g(x) = \mathrm{e}^{tx}$, ahol $t \in \mathbb{R}$ paraméter.

II. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ teret az euklidészi skaláris szorzással és azt az $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezést, melynek mátrixa a standard bázisban $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Mutassuk meg, hogy A pozitív definit.
2. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan pozív mátrix létezik, melynek a négyzete A. (Ennek a jele $A^{\frac{1}{2}}$.)
3. Számoljuk ki az $A^{\frac{1}{2}}$ mátrixot.
4. Hány olyan (valós) mátrix van, melynek a négyzete A?

III. Rendezés az önadjungált mátrixok halmazán.

1. Adjunk meg olyan A, B önadjungált 2×2-es mátrixokat, melyre $A \nleq B$ és $B \nleq A$ teljesül.
2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $A \leq B$ és $A^2 \nleq B^2$.
3. Legyen P, Q $n \times n$-es komplex projekció. Mutassuk meg, hogy

$$P \leq Q \Longleftrightarrow P = PQ \Longleftrightarrow P = QP$$

teljesül.