Számítási módszerek a fizikában 1, 12. hét

I. Legyen $R \in \mathbb{R}^+$ és tekintsük az alábbi halmazokat.

$$\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz + 2yz \leq R^2\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy + 6xz + 2yz + 16x - 8y + 20z + 30 \leq R^2\right\}$$

Használjuk fel, hogy az $a, b, c \in \mathbb{R}^p$ féltengelyű ellipszoid térfogata az $\mathbb{R}^3$ euklidészi térben $V = \dfrac{4\pi abc}{3}$, valamint, hogy az $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix pozitív definit az Ω_1 és Ω_2 halmaz térfogatának a meghatározásához.

II. Számoljuk ki az alábbi mátrixok rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2\,\mathrm{i} & 1 + 2\,\mathrm{i} \\ 3 & \mathrm{i} & 3 - \mathrm{i} \\ 4\,\mathrm{i} & -3 & -1 + 4\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

III. Legyen $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ skalárszorzatos vektortér és $T : V \to V$ pozitív operátor. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in V$ esetén

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle$$

teljesül.

IV. Legyen $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ pozitív definit mátrix és tekintsük az alábbi leképezéseket.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \qquad (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^* D B)$$
$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \qquad (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^* D B D)$$

Mutassuk meg, hogy minden $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ önadjungált mátrix esetén

$$|\mathrm{Tr}(ADB)| \leq \sqrt{\mathrm{Tr}(A^2 D)\,\mathrm{Tr}(B^2 D)} \quad \text{és} \quad |\mathrm{Tr}(ADBD)| \leq \sqrt{\mathrm{Tr}(ADAD)\,\mathrm{Tr}(BDBD)}$$

teljesül.