

Számítási módszerek a fizikában 1.

2. pótzárthelyi dolgozat

2021. 12. 08. 14.15-15.45

Név:

Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	Σ :

1. A $V = \mathbb{R}^2$ vektortéren jelölje \mathcal{A} az $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ bázist, valamint \mathcal{B} az $f_1 = (2, 3)$, $f_2 = (3, 2)$ bázist. Egy $T : V \rightarrow V$ lineáris leképezés mátrixa az \mathcal{A} - \mathcal{A} bázisban (10 p.)

$$T_{\mathcal{A}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Írja fel a T leképezés mátrixát a \mathcal{B} - \mathcal{B} bázisban.

2. Tekintsük a következő egyenletrendszert, ahol $u, v \in \mathbb{R}$ paraméter. (7+3 p.)

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + ux_2 - 2x_3 = 2 \\ -3x_1 + 9x_2 + x_3 = v \end{cases}$$

- a.) Az u és v paraméter mely értéke esetén lesz az egyenletrendszernek nulla, egy illetve végtelen sok megoldása.
- b.) Adja meg az egyenletrendszer megoldását a fenti esetekben.

3. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ és $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Határozza meg (10 p.)

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ és $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ értékét.

4. Legyen V a legfeljebb másodfokú valós polinomok vektortere és legyen (10 p.)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

- a.) Igazolja, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás.
- b.) Határozza meg a $p, q \in V$, $p(x) = x$ és a $q(x) = 1 - x$ vektorok által bezárt szöveget.

5. Legyen $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, valamint $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. (4×5 p.)

- a.) Határozza meg a C mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeit és a hozzájuk tartozó v_1, v_2, v_3 sajátvektorokat.
- b.) Adja meg a v_i vektor által meghatározott egyenesre való ortogonális vetítés P_i mátrixát az $i = 1, 2, 3$ esetben.
- c.) Adja meg a C mátrix spektrálfelbontását.
- d.) Számolja ki az $f(C)$ mátrixot.