Számítási módszerek a fizikában 1.
2. zárthelyi dolgozat
2021. 11. 29. 14.15-15.45

Név:
Neptun kód:

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$:

1. Legyen V a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektore a valós számtest felett. Tekintsük az alábbi műveletet. *(10 p.)*

$$T : V \to V \qquad p(x) \mapsto p(x+1)$$

(Például $T(x^2 + x + 2) = x^2 + 3x + 4$.)

1. Mutassa meg, hogy T lineáris operátor.
2. Írja fel a T operátor mátrixát az $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$ bázisban.

2. Tekintsük a következő egyenletrendszert, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter. *(7+3 p.)*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= b \\ 2x_1 + 6x_2 + ax_3 &= 3b + 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= b + 1 \end{cases}$$

a.) Az a és b paraméter mely értéke esetén lesz az egyenletrendszernek nulla, egy illetve végtelen sok megoldása.

b.) Adja meg az egyenletrendszer megoldását a fenti esetekben.

3. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Számolja ki a A^{-1} mátrixot. *(10 p.)*

4. Határozza meg az alábbi mátrix determinánsát. *(10 p.)*

$$B = \begin{pmatrix} \pi & \pi & -\pi & 4\pi \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & -2 & 20 \end{pmatrix}$$

5. Legyen $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, valamint $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$. *(4×5 p.)*

a.) Határozza meg a C mátrix $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeit és a hozzájuk tartozó v_1, v_2, v_3 sajátvektorokat.

b.) Adja meg a v_i vektor által meghatározott egyenesre való ortogonális vetítés P_i mátrixát az $i = 1, 2, 3$ esetben.

c.) Adja meg a C mátrix spektrálfelbontását.

d.) Számolja ki az $f(C)$ mátrixot.