Matematika MC, 6. hét

Függvény deriváltja

I. Deriváljuk a következő függvényeket és hozzuk egyszerűbb alakra a deriváltakat!

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{5}$	2. $f(x) = \sqrt{x^{\frac{5}{3}} \sqrt[3]{x}}$	3. $f(x) = \sqrt[4]{3x - 2x^2}$
4. $f(x) = \mathrm{e}^x(1 + x^2)$	5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x + \cos x}$	6. $f(x) = \sin^3 x$
4. $f(x) = \cos^2(2x + 3)$	8. $f(x) = \sin \log x$	9. $f(x) = \lg \sqrt{\cos x}$

II. Mutassuk meg, hogy $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ paraméterek esetén az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $f(x) = \mu\, \mathrm{e}^{\lambda x}$ függvényre $f' = \lambda f$;
2. $f(x) = \mu \sin(\lambda x)$ függvényre $f'' + \lambda^2 f = 0$;
3. $f(x) = \lambda x^2$ függvényre $(f')^2 = 4\lambda f$.

III. Adjuk meg az alábbi $f(x)$ függvények x_0 pontbeli érintőjének az egyenletét.

1. $f(x) = x^2 \quad x_0 = 4$ 2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \quad x_0 = 2$ 3. $f(x) = \sin x^2 \quad x_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

IV. Egy szabadon eső test magassága a $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban legyen $z(t)$. Eltekintve a légellenállástól, a szabadesés mozgásegynelete $\ddot{z} = -g$, ahol $\dot{z}$ jelöli a t (idő) változó szerinti deriválást és g a gravitációs gyorsulást. Mutassuk meg, hogy minden $v_0, h_0 \in \mathbb{R}$ esetén a

$$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h_0$$

függvényre $\ddot{z} = -g$, $z(0) = h_0$ és $\dot{z}(0) = v_0$ teljesül.