

Matematika MC, 7. hét

Függvények monotonitása

I. Adjuk meg azokat a legbővebb intervallumokat, ahol az alábbi függvények monoton nőnek, illetve csökkennek.

$$p(x) = x^3 - x^2 - 16x + 16 \quad f(x) = x^3 e^{-3x} \quad g(x) = \arctg(1+x) - \ln(2+2x+x^2)$$

II. Határozzuk meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ függvény értékkészletét.

Függvények szélsőértéke

I. Szélsőérték feladatok.

1. Legyen $T \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk területe. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk kerülete minimális?
2. Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ egy körcikk kerülete. Mekkora a kör sugara, ha a körcikk területe a legnagyobb?
3. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú henger adatait!
4. Határozzuk meg az $r \in \mathbb{R}^+$ sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúp adatait!
5. Határozzuk meg a $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, felül nyitott, legkisebb felszínű henger adatait!
6. Adott $V \in \mathbb{R}^+$ térfogatú, négyzet alapú tartályt akarunk készíteni a legkevesebb anyagból. Mekkoraak legyenek az élek, ha a tartály felül nyitott?

Haladóbb feladatok

I. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az f függvény differenciálható, a 0 pontban lokális minimuma van, azonban f' nem vált előjelet a 0 pontban (vagyis a 0 bármely környezetében f' felvesz pozitív és negatív értékeket is).

II. Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényt. Mutassuk meg, hogy az f függvény differenciálható, $f'(0) = 1$, azonban f nem monoton a 0 pont egyetlen környezetében sem (vagyis a 0 bármely környezetében f' felvesz pozitív és negatív értékeket is).