

## Matematika MC, 8. hét

### Határozott integrál

I. Az ismert területképletek (háromszög, téglalap, kör) alapján igazoljuk az alábbi egyenlőségeket.

$$1. \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

$$2. \int_{-1}^2 2x + 1 \, dx = 6$$

$$3. \int_{-2}^2 |x| \, dx = 4$$

$$4. \int_0^2 1 - x \, dx = 0$$

$$5. \int_{-1}^1 x^{19} \cos(x^2 + 3) \, dx = 0$$

$$6. \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx = \pi$$

II. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  és  $a \in \mathbb{R}^+$ .

1. Adott  $n \in \mathbb{N}^+$  esetén tekintsük a  $[0, a]$  intervallumnak az  $\left(\frac{ka}{n}\right)_{k=0, \dots, n}$  felosztását. Adjuk meg az  $f$  függvény ezen felosztáshoz tartozó alsó és felső közelítő összegét az alábbi formula felhasználásával.

$$\forall N \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$$

2. Közelítő összegek alkalmazásával igazoljuk az alábbi képletet.

$$\int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2}$$

3. Milyen hosszú utat tesz meg az álló helyzetből induló, egyenletes  $a = 2 \text{ m/s}^2$  gyorsulással haladó test a 90 km/h sebesség eléréséig?

III. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  és  $a \in \mathbb{R}^+$ .

1. Adott  $n \in \mathbb{N}^+$  esetén tekintsük a  $[0, a]$  intervallumnak az  $\left(\frac{ka}{n}\right)_{k=0, \dots, n}$  felosztását. Adjuk meg az  $f$  függvény ezen felosztáshoz tartozó alsó és felső közelítő összegét az alábbi formula felhasználásával.

$$\forall N \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

2. Közelítő összegek alkalmazásával igazoljuk az alábbi képletet.

$$\int_0^a x^2 \, dx = \frac{a^3}{3}$$

3. Vasútnál előírás, hogy az utasok kényelme miatt a szerelvény rándulása (gyorsulás időegység alatti változása) nem lehet több mint  $0,5 \text{ m/s}^3$ . Legalább milyen hosszú utat tesz meg az álló helyzetből induló szerelvény a 90 km/h sebesség eléréséig?