Matematika MC, 9. hét

Határozotlan integrál megoldása

I. Számítsuk ki a következő integrálokat.

1. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x = \int x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\,x = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{x} + C$
3. $\displaystyle\int 1 + \mathrm{e}^{x-1} \,\mathrm{d}\,x = x + \mathrm{e}^{x-1} + C$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1} \,\mathrm{d}\,x = x - 2\operatorname{arctg} x + C$

II. A parciális integrálás segítségével határozzuk meg az alábbi integrálokat, ahol $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. $\displaystyle\int xe^{ax} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{ax}(ax-1) + C$
2. $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{a^3}\,\mathrm{e}^{-ax}(a^2x^2 + 2ax + 2) + C$
3. $\displaystyle\int x\sin x \,\mathrm{d}\,x = \sin x - x\cos x + C$

III. A következő integrálok kiszámításához alkalmazzunk megfelelő helyettesítést.

1. $t = x+2$ $\quad\displaystyle\int \frac{x^3}{(x+2)^4} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{(t-2)^3}{t^4} \,\mathrm{d}\,t = \ln|x+2| + \frac{6}{x+2} - \frac{6}{(x+2)^2} + \frac{8}{3(x+2)^3} + C$
2. $t = \sqrt{1+x}$ $\quad\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + (\sqrt{1+x})^3} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{2}{1+t^2} \,\mathrm{d}\,t = 2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x} + C$
3. $t = \sqrt[4]{x-1}$ $\quad\displaystyle\int x\sqrt[4]{x-1} \,\mathrm{d}\,x = \int 4t^4 + 4t^8 \,\mathrm{d}\,t = \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{4}} + \frac{4}{9}(x-1)^{\frac{9}{4}} + C$
4. $t = \mathrm{e}^x$ $\quad\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{1+\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{t^3}{1+t} \,\mathrm{d}\,t = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C$
5. $t = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ $\quad\displaystyle\int \sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \,\mathrm{d}\,x = \int \frac{2t^2}{t^2+1} \,\mathrm{d}\,t = 2\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}) + C$
6. $t = \sqrt{x}$ $\quad\displaystyle\int \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x = \int 2t^2\,\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}\,t = 2\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x - 2\sqrt{x} + 2) + C$