Matematika MC, 10. hét

Improprius integrál és integrálfüggvény

I. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1+t^8}\,\mathrm{d}\,t$ és $g(x) = \int\limits_x^{-x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}\,t$. Határozzuk meg az f és g függvény deriváltját!

II. Legyen $1 < q$ és $0 < a$. Mutassuk meg, hogy az $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^q}$ függvény integrálható az $[a, \infty[$ halmazon és számoljuk is ki az $\int_a^\infty f$ integrált.

III. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat, ahol $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a < b$ paraméter.

1. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{a+bx^2}\,\mathrm{d}\,x$
4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{a-1}{x^2+(a+1)x+a}\,\mathrm{d}\,x$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty a^{-|x+b|}\,\mathrm{d}\,x$

IV. A következő feladat megoldásánál használjuk fel az

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \sqrt{\pi}$$

integrált. Mutassuk meg, hogy az $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ paraméterekkel értelmezett

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{c}\right)$$

függvényre pontosan akkor teljesül az $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f = 1$ egyenlőség, ha $0 < c$ és $a = \frac{1}{\sqrt{\pi c}}$.