Matematika MC, 12. hét

Várható érték és szórás

I. Határozzuk meg az alábbi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényhez tartozó várható értéket és szórást.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & \text{ha} \quad x \in [-1,1]\,; \\ 0, & \text{ha} \quad x \notin [-1,1]\,. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^2}, & \text{ha} \quad x \geq 5; \\ 0, & \text{ha} \quad x < 5. \end{cases}$$

II. Egy buszmegállóban az egymás után érkező buszok közötti időt percben mérve a $\lambda = \frac{1}{5}$ paraméterű exponenciális eloszlás ír le.

1. Mekkora annak a valószínűsége, hogy két busz között kevesebb mint 3 perc telik el?
2. Mekkor annak a valószínűsége, hogy két busz között legalább 10 perc telik el?

III. Legyen X és Y a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $X+Y$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét. Adjuk meg $\mathbb{E}(X+Y)$ és $\sigma(X+Y)$ értékét.

IV. Két szabályos dobókockával dobva mennyi lesz a kisebbik dobott szám várható értéke?

V*. Tegyük fel, hogy van egy végtelen térfogatú urnánk és végtelen sok golyó, melyekre a nullánál nagyobb természetes számok vannak felírva. Az urna kezdetben legyen üres, majd a következő protokoll szerint jájunk el. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén éjfél előtt $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ perccel az urnába helyezzük be a $10k+1$, $10k+2$, ..., $10k+9$ és $10k+10$ számú golyókat, majd rázzuk össze jól az urnát, és vegyünk ki belőle egy golyót, amit elhajítunk. Igazoljuk, hogy annak a valószínűsége, hogy éjfél után üres az urna 1.