Matematika MC, 13. hét

Vektorok

I. Euklidészi tér vektorai.

1. Mekkora az $a = (1, 2, -1)$ és a $b = (2, 1, 1)$ vektor által bezárt szög?
2. A $c \in \mathbb{R}$ paraméter mely értéke esetén lesz az $u = (3, 2, 1)$ és a $v = (-5, 1, c)$ vektor merőleges egymásra?
3. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorra
$$\langle x + y, x - y \rangle = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \|x\| = \|y\| \,,$$
teljesül, ahol $\|\cdot\|$ jelöli az euklidészi normát.
4. Mekkora szöget zár be egymással a négydimenziós kocka egyik csúcsából indított testátló és oldalél vektor?
5. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ esetén, ha $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$, akkor $a + 2b + 3c \leq \sqrt{14}$.
6. Az $x, y, z \in \mathbb{R}$ paraméterek mely értékei esetén lesz az $f(x, y, z) = 2x - \sqrt{5}y + 4z$ a kifejezés értéke maximális illetve minimális az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ feltétel mellett.

Lineáris leképezések

I. Tekintsük az alábbi mátrixokat.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg a $2A + A^2 - BA + B$ mátrixot.

II. Határozzuk meg az alábbi mátrixok n-edik ($n \in \mathbb{N}^+$) hatványát, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméter.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Adjuk meg, hogy mely A mátrix, illetve x és b vektor esetén írható fel az

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5 = 0 \\ -x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3 = 0 \\ x_1 - x_4 + 7 = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert az $Ax = b$ alakban.