

# Matematika MC

Andai Attila\*

2022. február 10.

---

\*andaia@math.bme.hu

## Tartalomjegyzék

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| 1. Valós számok elemei műveletei.....            | 1  |
| 2. Exponenciális, logaritmus, trigonometria..... | 4  |
| 3. Függvények .....                              | 5  |
| 4. Függvények határértéke és folytonossága.....  | 7  |
| 5. Függvénytani alapfogalmak .....               | 9  |
| 6. Deriválás fogalma és alaptulajdonságai.....   | 10 |
| 7. A derivált kapcsolata a függvénnyel.....      | 11 |
| 8. Határozott integrál.....                      | 13 |
| 9. A Newton–Leibniz-tétel és következményei..... | 14 |
| 10. Improprius integrálás.....                   | 16 |
| 11. Sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény.....     | 17 |
| 12. Várható érték és szórás .....                | 18 |
| 13. Euklidészi tér.....                          | 20 |

A BME 2021/22 I. félévében tartott Matematika MC előadás anyaga heti bontásban. Még kezdetleges, nyers változat, melyben előfordulhatnak hibák. Ha hibát talál, kérem szóljon a szerzőnek.

A kiegészítésben szereplő részek nem lesznek számonkérve, a kiegészítések végét a sor végén található  $\diamond$  szimbólum jelzi.

2021. szeptember 24.  
Andai Attila

## 1. Valós számok elemei műveletei

**Jelölés.** Matematikai állításokkal kapcsolatos logikában is használt jelölések. A változójelekre tetszőleges betűt, illetve jelet fogunk használni a továbbiakban. Adott  $p$  és  $q$  állítás esetén az alábbi alapvető logikai kapcsolókat értelmezzük:

- $\neg p$ :  $p$  tagadása, negációja;
- $p \vee q$ :  $p$  vagy  $q$ ;
- $p \wedge q$ :  $p$  és  $q$ ;
- $p \rightarrow q$ :  $p$  állításból következik  $q$ ;
- $\exists$ : létezik szimbólum;
- $\forall$ : minden szimbólum.

**Jelölés.** A következő halmazelméleti jelöléseket fogjuk használni:

- $x \in A$ :  $x$  eleme az  $A$  halmaznak;
- $x \notin A$ :  $x$  nem eleme az  $A$  halmaznak;
- $A \cup B$ : az  $A$  és  $B$  halmaz uniója;
- $A \cap B$ : az  $A$  és  $B$  halmaz metszete;
- $A \setminus B$ : az  $A$  halmazból elvesszük a  $B$  halmazt;
- $A \subseteq B$ : az  $A$  halmaz részhalmaza a  $B$  halmaznak;
- $A \not\subseteq B$ : az  $A$  halmaz nem részhalmaza a  $B$  halmaznak.

**Megjegyzés.** Az elemi halmazjelöléseket az alábbi módon értelmezzük.

$$\begin{aligned}\forall x : \quad x \in A \cup B &\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \\ \forall x : \quad x \in A \cap B &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \\ \forall x : \quad x \in A \setminus B &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \\ A \subseteq B &\leftrightarrow (\forall x : x \in A \rightarrow x \in B)\end{aligned}$$

◇

**Jelölés.** Az alábbi jelöléseket fogjuk még használni:

- $\mathbb{N}$ : természetes számok halmaza;
- $\mathbb{Z}$ : egész számok halmaza;
- $\mathbb{Q}$ : racionális számok halmaza;
- $\mathbb{R}$ : valós számok halmaza;
- $\mathbb{R}^+$ : a szigorúan pozitív valós számok halmaza ( $x \in \mathbb{R}^+ \leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \wedge x > 0)$ );
- $\mathbb{R}_0^+$ : a nem negatív valós számok halmaza ( $x \in \mathbb{R}_0^+ \leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0)$ );
- $f : A \rightarrow B$ :  $f$  függvény, az  $A$  halmaz egyes elemeihez  $B$  halmazbeli elemet rendel;
- $\text{Dom } f$ :  $f$  függvény értelmezési tartománya;
- $\text{Ran } f$ :  $f$  függvény értékkészlete.

**Kiegészítés.** Létezik olyan  $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1, \leq)$  nyolcas, ahol

1.  $0, 1 \in \mathbb{R}, 0 \neq 1$ ;
2.  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a + b$  függvény,  $-: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto -a$  függvény a

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 &= a \\ \forall a \in \mathbb{R} \quad a + (-a) &= 0 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c &= a + (b + c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b &= b + a\end{aligned}$$

tulajdonságokkal;

3.  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a \cdot b$  függvény,  $^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto a^{-1}$  függvény a

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 &= a \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad a \cdot a^{-1} &= 1 \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b &= b \cdot a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c\end{aligned}$$

tulajdonságokkal;

4.  $\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  részhalmaz, melyre minden  $(a, b) \in \leq$  esetén az  $a \leq b$  jelölést használjuk, és mely rendelkezik a

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} \quad & a \leq a \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad & (a \leq b \wedge b \leq a) \rightarrow a = b \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad & a \leq b \vee b \leq a \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a \leq b) \rightarrow a + c \leq b + c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad & (a \leq b \wedge 0 \leq c) \rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \end{aligned}$$

tulajdonságokkal;

5. továbbá

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} : ((\exists K \in \mathbb{R} : (\forall a \in A : a \leq K)) \rightarrow \\ \rightarrow (\exists s \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : a \leq s) \wedge (\forall s' \in \mathbb{R} : ((\forall a \in A : a \leq s') \rightarrow s \leq s')))))) \end{aligned}$$

teljesül.

Ebben a struktúrában az  $\mathbb{R}$  halmaz elemeit nevezzük valós számoknak, a  $+$  és a  $\cdot$  műveletet pedig összeadásnak és szorzásnak.

◇

**Kiegészítés.** Ha  $(\mathbf{K}, \oplus, \ominus, \times, {}^{\ominus 1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \preceq)$  olyan struktúra, melyre szintén teljesülnek a fenti állításban megfogalmazott tulajdonságok, akkor létezik olyan  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{K}$  bijekció, melyre  $\varphi(0) = \mathbf{0}$ ,  $\varphi(1) = \mathbf{1}$  és minden  $x, y \in \mathbb{R}$  elem esetén

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(x) \oplus \varphi(y) \\ \varphi(-x) &= \ominus \varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \\ x \neq 0 &\Rightarrow \varphi(x) \neq \mathbf{0} \wedge \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{\ominus 1} \\ x \leq y &\Leftrightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y) \end{aligned}$$

teljesül.

◇

**Jelölés.** A szorzás  $\cdot$  jelét általában nem írjuk ki, azaz  $a, b \in \mathbb{R}$  esetén  $ab$  jelöli az  $a \cdot b$  elemet. Adott  $a, b \in \mathbb{R}$  esetén  $a - b$  jelöli az  $a + (-b)$  elemet. Az  $a \in \mathbb{R}$  és  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  esetén az  $ab^{-1}$  elemre gyakran az  $a : b$  vagy az  $\frac{a}{b}$  jelölést használjuk. Továbbá minden  $a, b \in \mathbb{R}$  esetén  $a < b$  vagy  $b > a$  azt jelöli, hogy  $a \leq b$  és  $a \neq b$ .

**Kiegészítés.** A valós számok fenti axiómából már levezethetők azok a tulajdonságok, melyeket már megszoktunk.

**1.1. Tétel.** *A valós számok halmazán az alábbiak teljesülnek.*

1.  $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 0$
2.  $\forall x \in \mathbb{R} : (-1) \cdot x = -x$
3.  $\nexists x \in \mathbb{R} : 0 \cdot x = 1$
4.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \rightarrow -y < -x$
5.  $(-1)^2 = 1$
6.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x < y \wedge z < 0) \rightarrow yz < xz$
7.  $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq x^2$
8.  $0 < 1$
9.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : 0 < x < y \rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

**Bizonyítás.**

1. Legyen  $x \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Ekkor  $0 + 0 = 0$  és a disztributivitás miatt

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x,$$

amihez hozzáadva a  $-(0 \cdot x)$  elemet  $0 \cdot x = 0$  adódik.

2. Ha  $x \in \mathbb{R}$  akkor az 1. pont alapján  $0 \cdot x = 0$ , ezért

$$\begin{aligned} (-1) \cdot x &= 0 + (-1) \cdot x = -x + x + (-1) \cdot x = -x + 1 \cdot x + (-1) \cdot x = \\ &= -x + (1 + (-1))x = -x + 0 \cdot x = -x + 0 = -x. \end{aligned}$$

3. Az 1. pont nyilvánvaló következménye.

4. Ha  $x, y \in \mathbb{R}$  és  $x < y$ , akkor az egyenlőtlenséghez hozzáadva a  $-x - y$  számot  $-y < -x$  adódik.

5. A

$$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = (1 + (-1) + (-1)) \cdot (-1) = -1 + (-1)^2 + (-1)^2$$

egyenlet elejéhez és végéhez hozzáadva a  $-(-1)^2$  számot

$$0 = -1 + (-1)^2,$$

majd az 1 számot

$$1 = (-1)^2$$

adódik.

6. Legyen  $x, y, z \in \mathbb{R}$  olyan, melyre  $x < y$  és  $z < 0$  teljesül. A 4. pont alapján ekkor  $0 < -z$ , vagyis  $-zx < -zy$ , amiből megint a 4. pont alapján  $zy < zx$  következik.

7. Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Ha  $0 \leq x \in \mathbb{R}$ , akkor az egyenlőtlenséget megszorozva az  $x$  pozitív számmal  $0 \leq x^2$  adódik. Ha  $x \leq 0$ , akkor  $0 \leq -x$ , amit megszorozva a  $-x$  pozitív számmal  $0 \leq x^2$  adódik.

8. A 7. pont alapján nyilvánvaló.

9. Legyen  $x \in \mathbb{R}$  olyan, melyre  $0 < x$  teljesül. Ha  $\frac{1}{x} \leq 0$  teljesülne, akkor ezt megszorozva az  $x$  számmal  $1 \leq 0$  ellentmondás adódna, tehát  $0 < \frac{1}{x}$ . Ha  $x, y \in \mathbb{R}$  olyan, melyre  $0 < x < y$  teljesül, akkor az  $x < y$  egyenlőtlenséget megszorozva az  $\frac{1}{xy}$  számmal  $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$  adódik.

◇

**1.2. Definíció.** A valós számok halmazán definiáljuk még az  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \leq y$  elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$\begin{aligned} [x, y] &= \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \leq y\} \\ ]x, y] &= \{z \in \mathbb{R} \mid x < z \leq y\} \\ [x, y[ &= \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z < y\} \\ ]x, y[ &= \{z \in \mathbb{R} \mid x < z < y\} \\ [x, \infty[ &= \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z\} \\ ]x, \infty[ &= \{z \in \mathbb{R} \mid x < z\} \\ ]-\infty, x] &= \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq x\} \\ ]-\infty, x[ &= \{z \in \mathbb{R} \mid z < x\} \end{aligned}$$

Továbbá bevezetjük még az

$$]-\infty, \infty[ = \mathbb{R}$$

jelölést. Ezen halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

**1.3. Tétel.** Adott  $p, q \in \mathbb{R}$  esetén az

1.  $x^2 + px + q = 0$  egyenletnek létezik megoldása, ha  $p^2 - 4q \geq 0$ , és a megoldás

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2};$$

2.  $x^2 + px + q < 0$  egyenlőtlenségnek a  $p^2 - 4q < 0$  esetben nincs megoldása; a  $p^2 - 4q > 0$  esetben pedig

$$x^2 + px + q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left] \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \right[.$$

## 2. Exponenciális, logaritmus, trigonometria

**2.1. Tétel.** Minden  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  paraméter esetén létezik egyetlen

$$\exp_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto q^x$$

olyan folytonos függvény, melyre az alábbiak teljesülnek.

1.  $q^1 = q$
2.  $q^0 = 1$
3.  $\forall a, b \in \mathbb{R} : q^{a+b} = q^a \cdot q^b$
4.  $\forall a, b \in \mathbb{R} : (q^a)^b = q^{ab}$
5.  $\forall a \in \mathbb{R} : q^{-a} = (q^a)^{-1}$

**2.2. Tétel.** Minden  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  paraméter esetén

- $\text{Dom exp}_q = \mathbb{R}$  és  $\text{Ran exp}_q = \mathbb{R}^+$ ;
- ha  $q > 1$ , akkor az  $\exp_q$  függvény szigorúan monoton növekvő;
- ha  $q < 1$ , akkor az  $\exp_q$  függvény szigorúan monoton csökkenő.

**2.3. Definíció.** Minden  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  és minden  $x \in \mathbb{R}^+$  azt az egyetlen  $z \in \mathbb{R}$  számot, melyre  $q^z = x$  teljesül a  $\log_q(x)$  szimbólummal fogjuk jelölni. Továbbá a

$$\log_q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \log_q(x)$$

függvényt  $q$  alapú logaritmusnak nevezzük.

**2.4. Tétel.** Minden  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  esetén a logaritmus függvényre az alábbiak teljesülnek.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^+ : q^{\log_q(x)} = x$
2.  $\forall x \in \mathbb{R} : \log_q(q^x) = x$
3.  $\log_q q = 1$
4.  $\log_q 1 = 0$
5.  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : \log_q(xy) = \log_q(x) + \log_q(y)$
6.  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \forall y \in \mathbb{R} : y \log_q(x) = \log_q(x^y)$
7.  $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \log_q x^{-1} = -\log_q x$

**2.5. Tétel.** Minden  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  paraméter esetén

- $\text{Dom log}_q = \mathbb{R}^+$  és  $\text{Ran log}_q = \mathbb{R}$ ;
- ha  $q > 1$ , akkor az  $\log_q$  függvény szigorúan monoton növekvő;
- ha  $q < 1$ , akkor az  $\log_q$  függvény szigorúan monoton csökkenő.

**2.6. Definíció.** Minden  $x \in \mathbb{R}$  szám esetén bevezetjük az  $x^\circ$  jelölést az  $x^\circ = x \cdot \frac{\pi}{180}$ , melyet  $x$  foknak mondunk.

**2.7. Definíció.** Adott  $\varphi \in \mathbb{R}$  esetén az  $\mathbb{R}^2$  síkon az origóból induló, egységnyi hosszúságú, az első tengellyel  $\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \cdot 180^\circ$  fokos szöget bezáró vektor végpontjának a koordinátáját jelölje  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

Adott  $\varphi \in \mathbb{R}$  esetén, ha  $\cos \varphi \neq 0$ , akkor legyen  $\text{tg } \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ .

**2.8. Tétel.** (Trigonometrikus függvények elemi alaptulajdonságai.)

- $\text{Dom sin} = \mathbb{R}$ ,  $\text{Ran sin} = [-1, 1]$ .
- $\text{Dom cos} = \mathbb{R}$ ,  $\text{Ran cos} = [-1, 1]$ .
- $\text{Dom tg} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $\text{Ran tg} = \mathbb{R}$ .
- Minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

- $\cos(0) = 1$ ,  $\sin(0) = 0$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $\cos(\pi) = -1$ ,  $\sin(\pi) = 0$ .
- Minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  és  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ .
- Minden  $x \in \mathbb{R}$ , ha  $\cos x \neq 0$ , akkor  $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x)$ .

**2.9. Tétel.** *Elemi trigonometrikus függvények monotonitása.*

1. A  $\cos$  függvény szigorúan monoton csökkenő a  $[0, \pi]$  intervallumon és itt minden értéket felvesz pontosan egyszer a  $[-1, 1]$  intervallumból.
2. A  $\sin$  függvény szigorúan monoton növekvő a  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumon és itt minden értéket felvesz pontosan egyszer a  $[-1, 1]$  intervallumból.
3. A  $\operatorname{tg}$  függvény szigorúan monoton növekvő a  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  intervallumon és itt minden valós számot pontosan egyszer vesz fel értékül.

**2.10. Definíció.** *Elemi trigonometrikus függvények inverze.*

1. Minden  $x \in [-1, 1]$  számhoz pontosan egy olyan  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  érték tartozik, melyre  $\sin(\varphi) = x$  teljesül. Ezt a  $\varphi$  számot az  $\arcsin(x)$  szimbólummal fogjuk jelölni. Az *arkusz szinusz függvény*

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad x \mapsto \arcsin(x).$$

2. Minden  $x \in [-1, 1]$  számhoz pontosan egy olyan  $\varphi \in [0, \pi]$  érték tartozik, melyre  $\cos(\varphi) = x$  teljesül. Ezt a  $\varphi$  számot az  $\arccos(x)$  szimbólummal fogjuk jelölni. Az *arkusz koszinusz függvény*

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad x \mapsto \arccos(x).$$

3. Minden  $x \in \mathbb{R}$  számhoz pontosan egy olyan  $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  érték tartozik, melyre  $\operatorname{tg}(\varphi) = x$  teljesül. Ezt a  $\varphi$  számot az  $\operatorname{arctg}(x)$  szimbólummal fogjuk jelölni. Az *arkusz tangens függvény*

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \quad x \mapsto \operatorname{arctg}(x).$$

**2.11. Tétel.** *Legyen  $q \in [-1, 1]$ .*

- A  $\sin x = q$  egyenlet megoldása  $x_1 = 2k\pi + \arcsin x$  és  $x_2 = 2l\pi + \pi - \arcsin x$ , ahol  $k, l \in \mathbb{Z}$ .
- A  $\cos x = q$  egyenlet megoldása  $x_{1,2} = 2k\pi \pm \arccos x$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}$ .
- A  $\operatorname{tg} x = q$  egyenlet megoldása  $x = k\pi + \operatorname{arctg} x$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 3. Függvények

**Kiegészítés.** A későbbiekben szükségünk lesz a rendezett pár fogalmára, melyet a következőkben definiálunk.

**3.1. Definíció.** Adott  $x, y$  halmazok esetén az

$$(x, y) \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

**3.2. Tétel.** Minden  $x, y, a, b$  halmazra  $(x, y) = (a, b) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b)$  teljesül.

◇

**3.3. Definíció.** Az  $A$  és  $B$  halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

halmazt.

**Megjegyzés.** Az  $A \times B$  halmaz elemei rendezett párok és  $(x, y) \in A \times B$  pontosan akkor teljesül, ha  $x \in A$  és  $y \in B$ . ◇

**3.4. Definíció.** Adott  $X, Y$  halmazok esetén a Descartes-szorzatuk  $f \subseteq X \times Y$  részhalmazát *függvénynek* nevezzük, ha

$$\forall x \forall y \forall y' ((x, y) \in f \wedge (x, y') \in f) \rightarrow y = y'$$

Az  $f \subseteq X \times Y$  függvény

– *értelmezési tartománya*

$$\text{Dom } f \triangleq \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in f\};$$

– *értékkészlete*

$$\text{Ran } f \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in f\}.$$

**Jelölés.** Az  $f \subseteq X \times Y$  függvényre a továbbiakban az  $f : X \rightarrow Y$  jelölést használjuk. Az  $f : X \rightarrow Y$  függvény értelmezési tartománya  $\text{Dom } f \subseteq X$  és értékkészlete  $\text{Ran } f \subseteq Y$ . Adott  $x \in \text{Dom } f \subseteq X$  esetén azt az egyértelműen meghatározott  $y \in Y$  elemet, melyre  $(x, y) \in f$  teljesül  $f(x)$  jelöli. Az  $f$  függvényt, mint hozzárendelési szabályt gyakran az

$$f : X \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x)$$

alakban írjuk fel. A  $H \subseteq X$  esetén a függvény leszűkítése

$$f|_H : H \rightarrow Y \quad x \mapsto f(x).$$

Abban az esetben, ha az  $f : X \rightarrow Y$  függvényre  $\text{Dom } f = X$  teljesül, akkor az  $f : X \rightarrow Y$  jelölést fogjuk használni.

**3.5. Definíció.** Az  $f : X \rightarrow Y$  függvény

- *injektív*, ha  $\forall x, x' \in X : (f(x) = f(x') \rightarrow x = x')$ ;
- *bijektív*, ha  $\text{Dom } f = X$ ,  $\text{Ran } f = Y$  és injektív.

**3.6. Tétel.** Ha  $f : X \rightarrow Y$  injektív függvény, akkor invertálható és az inverze az

$$f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid f(x) = y\}$$

*függvény.*

**3.7. Definíció.** Ha  $f$  injektív függvény, akkor az  $f^{-1}$  az  $f$  függvény inverze.

**3.8. Definíció.** Ha  $f : X \rightarrow Y$  és  $g : Y \rightarrow Z$  függvény, akkor az

$$g \circ f : \{x \in X \mid x \in \text{Dom } f, f(x) \in \text{Dom } g\} \rightarrow Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

függvény az  $f$  és a  $g$  függvény kompozíciója.

**3.9. Tétel.** Ha  $f$  injektív függvény, akkor

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_{\text{Dom } f} \quad \text{és} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_{\text{Ran } f}$$

teljesül.

**3.10. Tétel.** Függvények értelmezési tartománya és értékkészlete.

- Minden  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  esetén  $\text{Dom } \exp_q = \mathbb{R}$  és  $\text{Ran } \exp_q = \mathbb{R}^+$ .
- Minden  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  esetén  $\text{Dom } \log_q = \mathbb{R}^+$  és  $\text{Ran } \exp_q = \mathbb{R}$ .
- $\text{Dom } \sin = \mathbb{R}$ ,  $\text{Ran } \sin = [-1, 1]$ ,  $\text{Dom } \cos = \mathbb{R}$ ,  $\text{Ran } \cos = [-1, 1]$ .
- $\text{Dom } \text{tg} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $\text{Ran } \text{tg} = \mathbb{R}$ .
- $\text{Dom } \arcsin = [-1, 1]$ ,  $\text{Ran } \arcsin = \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $\text{Dom } \arccos = [-1, 1]$ ,  $\text{Ran } \arccos = [0, \pi]$ .
- $\text{Dom } \text{arctg} = \mathbb{R}$ ,  $\text{Ran } \text{arctg} = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .
- $\text{Dom } \sqrt{\cdot} = \mathbb{R}_0^+$ ,  $\text{Ran } \sqrt{\cdot} = \mathbb{R}_0^+$ .

## 4. Függvények határértéke és folytonossága

**4.1. Definíció.** Legyen  $A \subseteq \mathbb{R}$  és  $a \in \mathbb{R}$ .

- Azt mondjuk, hogy az  $a$  pont az  $A$  halmaz torlódási pontja, ha minden  $r \in \mathbb{R}^+$  esetén van olyan  $x \in A$ , melyre  $0 < |x - a| < r$  teljesül.
- Azt mondjuk, hogy az  $a$  pont az  $A$  halmaz belső pontja, ha létezik olyan  $r \in \mathbb{R}^+$ , hogy minden  $x \in \mathbb{R}$  pontra ha  $|x - a| < r$  teljesül, akkor  $x \in A$ .

**4.2. Definíció.** Minden  $r \in \mathbb{R}^+$  számra és  $x \in \mathbb{R}$  pontra a

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$$

halmazt az  $x$  pont körüli  $r$  sugarú nyílt gömbi környezetnek nevezzük.

**4.3. Tétel.** Minden  $r \in \mathbb{R}^+$  és  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $B_r(x) = ]x - r, x + r[$ .

**4.4. Tétel.** Legyen  $A \subseteq \mathbb{R}$  és  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Az  $a$  pont pontosan akkor torlódási pontja az  $A$  halmaznak, ha minden  $r \in \mathbb{R}^+$  esetén  $A \cap (B_r(x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$  teljesül.
2. Az  $a$  pont pontosan akkor belső pontja az  $A$  halmaznak, ha létezik olyan  $r \in \mathbb{R}^+$ , hogy  $B_r(a) \subseteq A$  teljesül.

**Kiegészítés.** A belső pont segítségével definiálható a nyílt halmaz fogalma.

**4.5. Definíció.** Az  $X \subseteq \mathbb{R}$  halmaz

- *nyílt*, ha minden pontja belső pont, azaz minden  $x \in X$  ponthoz létezik  $r \in \mathbb{R}^+$ , hogy  $B_r(x) \subseteq X$  teljesül;
- *zárt*, ha  $\mathbb{R} \setminus X$  nyílt;
- *korlátos*, ha létezik  $r \in \mathbb{R}^+$  és  $x \in \mathbb{R}$ , hogy  $X \subseteq B_r(x)$  teljesül.

◇

**4.6. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és  $a \in \mathbb{R}$  a  $\text{Dom } f$  halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény határértéke az  $a$  pontban  $A \in \mathbb{R}$ , ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

**4.7. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és legyen  $a$  torlódási pontja a  $\text{Dom } f$  halmaznak.

- Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény határértéke az  $a$  pontban végtelen, ha

$$\forall K \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (0 < |x - a| < \delta \rightarrow K < f(x)).$$

- Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény határértéke az  $a$  pontban mínusz végtelen, ha  $-f$  határértéke az  $a$  pontban végtelen.

**4.8. Definíció.** Az  $A \subseteq \mathbb{R}$  halmaznak a végtelen torlódási pontja, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A (\varepsilon < x).$$

Az  $A \subseteq \mathbb{R}$  halmaznak a mínusz végtelen torlódási pontja, ha a  $-A$  halmaznak torlódási pontja a végtelen.

**4.9. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és legyen a  $\text{Dom } f$  halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az  $f$  függvény határértéke a végtelenben,

- $A \in \mathbb{R}$ , ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (\delta < x \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

- *végtelen*, ha

$$\forall K \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (\delta < x \rightarrow K < f(x)).$$

- *mínusz végtelen*, ha  $-f$  határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az  $x \mapsto f(-x)$  függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

**4.10. Definíció.** (*A lim művelet.*)

- Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , és legyen  $a \in \mathbb{R}$  a  $\text{Dom } f$  halmaz torlódási pontja. Az  $f$  függvény határértékét az  $a$  pontban  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  vagy  $\lim_a f$  jelöli.
- Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , és legyen  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  a  $\text{Dom } f$  halmaz torlódási pontja. Az  $f$  függvény határértékét az  $a$  pontban  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  vagy  $\lim_a f$  jelöli.

**4.11. Tétel.** Legyen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $a \in \mathbb{R}$  torlódási pontja a  $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g$  halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik  $\lim_a f$  és  $\lim_a g$ , valamint  $\lim_a f, \lim_a g \notin \{\infty, -\infty\}$ . Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1.  $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$
2.  $\lim_a (\lambda f) = \lambda (\lim_a f)$
3.  $\lim_a (fg) = \left( \lim_a f \right) \left( \lim_a g \right)$
4.  $\lim_a |f| = \left| \lim_a f \right|$

Továbbá, ha  $0 \notin \text{Ran } f$  és  $\lim_a f \neq 0$ , akkor

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\lim_a f}.$$

**4.12. Tétel.** (*Rendőr-elv függvények határértékére.*) Ha az  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre  $\text{Dom } f = \text{Dom } g = \text{Dom } h$  és minden  $x \in \text{Dom } f$  esetén  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  teljesül, valamint az  $a \in \mathbb{R}$  pont torlódási pontja a  $\text{Dom } f$  halmaznak és valamely  $A \in \mathbb{R}$  esetén  $\lim_a f = \lim_a h = A$  teljesül, akkor létezik a  $\lim_a g$  határérték és  $\lim_a g = A$ .

**4.13. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és  $a \in \mathbb{R}$ .

- Ha  $a$  torlódási pontja az  $]a, \infty[ \cap \text{Dom } f$  halmaznak, és az  $f|_{]a, \infty[}$  függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]a, \infty[} = A$$

határértéke az  $a$  pontban, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény jobb oldali határértéke az  $a$  pontban  $A$ , és az  $A$  határértéket a  $\lim_{x \rightarrow a+0} f$  vagy a  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  szimbólummal jelöljük.

- Ha  $a$  torlódási pontja a  $]-\infty, a[ \cap \text{Dom } f$  halmaznak, és az  $f|_{]-\infty, a[}$  függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]-\infty, a[} = A$$

határértéke az  $a$  pontban, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény bal oldali határértéke az  $a$  pontban  $A$ , és az  $A$  határértéket a  $\lim_{x \rightarrow a-0} f$  vagy a  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  szimbólummal jelöljük.

**Magyarázat.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a, A \in \mathbb{R}$ . A fenti definíció szerint az  $f$  függvénynek a jobb oldali határértéke az  $a$  pontban  $A$ , pontosan akkor, ha  $a$  torlódási pontja a  $\text{Dom } f \cap ]a, \infty[$  halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül. Hasonlóan, az  $f$  függvénynek a bal oldali határértéke az  $a$  pontban  $A$ , pontosan akkor, ha  $a$  torlódási pontja a  $\text{Dom } f \cap ]-\infty, a[$  halmaznak és

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (a - \delta < x < a \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

teljesül.

**4.14. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és legyen  $a \in \text{Int Dom } f$ . Pontosán akkor létezik az  $f$  függvénynek határértéke az  $a$  pontban, ha ott létezik jobb, illetve bal oldali határértéke, és  $\lim_{a+} f = \lim_{a-} f$  teljesül.

**4.15. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \text{Dom } f$ .

– Az  $f$  függvény folytonos az  $a$  pontban, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \text{Dom } f : (|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

– Az  $f$  függvény folytonos, ha minden  $a \in \text{Dom } f$  pontban folytonos.

**Jelölés.** Legyen  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Az  $A$  halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A, \mathbb{R}) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}$$

jelölést használjuk.

**4.16. Tétel.** Legyen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Ha az  $f$  és  $g$  függvény folytonos az  $a$  pontban, akkor az

$$f + g, fg, cf, |f|, f \circ g$$

függvények is folytonosak az  $a$  pontban, valamint ha  $f(a) \neq 0$ , akkor az  $\frac{1}{f}$  függvény is folytonos az  $a$  pontban.

**4.17. Tétel.** Elemi függvények folytonossága.

1. Minden  $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  esetén az  $\exp_q$  és a  $\log_q$  függvény folytonos.
2. Minden polinom folytonos.
3. A  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{tg}$ ,  $\arcsin$ ,  $\arccos$  és  $\arctg$  függvények folytonosak.

**4.18. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény és  $a \in \text{Dom } f$  olyan pont, mely torlódási pontja is a  $\text{Dom } f$  halmaznak. Ekkor az  $f$  függvény pontosán akkor folytonos az  $a$  pontban, ha  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  teljesül.

**4.19. Tétel.** (Bolzano-tétel.) Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , és  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvény, melyre  $f(a)f(b) < 0$ . Ekkor létezik  $c \in ]a, b[$ , melyre  $f(c) = 0$ .

**4.20. Tétel.** (Weierstrass tétele.) Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , és  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Ekkor létezik olyan  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , hogy minden  $x \in [a, b]$  esetén

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

teljesül.

## 5. Függvénytani alapfogalmak

**5.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény

- páros, ha minden  $x \in \text{Dom } f$  elemre  $-x \in \text{Dom } f$ , és  $f(x) = f(-x)$ ;
- páratlan, ha minden  $x \in \text{Dom } f$  elemre  $-x \in \text{Dom } f$ , és  $f(x) = -f(-x)$ ;
- monoton növekvő, ha minden  $x, y \in \text{Dom } f$  elemre  $x \leq y$  esetén  $f(x) \leq f(y)$ ;
- monoton fogyó, ha minden  $x, y \in \text{Dom } f$  elemre  $x \leq y$  esetén  $f(x) \geq f(y)$ ;
- monoton, ha monoton növekvő, vagy monoton fogyó;
- szigorúan monoton növekvő, ha minden  $x, y \in \text{Dom } f$  elemre  $x < y$  esetén  $f(x) < f(y)$ ;
- szigorúan monoton fogyó, ha minden  $x, y \in \text{Dom } f$  elemre  $x < y$  esetén  $f(x) > f(y)$ ;
- szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő, vagy szigorúan monoton fogyó;
- alulról korlátos, ha létezik olyan  $C \in \mathbb{R}$  szám, hogy minden  $x \in \text{Dom } f$  esetén  $C \leq f(x)$ ;
- felülről korlátos, ha létezik olyan  $C \in \mathbb{R}$  szám, hogy minden  $x \in \text{Dom } f$  esetén  $f(x) \leq C$ ;

- *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos;
- *konvex* az  $I \subseteq \text{Dom } f$  intervallumon, ha minden  $x, y \in I$  elemre minden  $a \in [0, 1]$  esetén

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y)$$

teljesül;

- *konkáv* az  $I \subseteq \text{Dom } f$  intervallumon, ha minden  $x, y \in I$  elemre minden  $a \in [0, 1]$  esetén

$$f(ax + (1 - a)y) \geq af(x) + (1 - a)f(y)$$

teljesül;

- *periodikus*, ha  $f$  nem konstans függvény, és ha létezik  $p \in \mathbb{R}^+$ , hogy minden  $x \in \text{Dom } f$  esetén  $x + p \in \text{Dom } f$  és  $f(x) = f(x + p)$ , amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú  $p$  szám nagyobb mint nulla, azt az  $f$  függvény periódusának nevezzük;
- *zérushelye* vagy *gyöke*  $x \in \text{Dom } f$ , ha  $f(x) = 0$ .

**5.2. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \mathbb{R}$ .

- Az  $f$  függvénynek *lokális maximuma van az  $a$  pontban*, ha létezik  $r \in \mathbb{R}^+$ , hogy minden  $x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$  esetén  $f(a) \geq f(x)$ .
- Az  $f$  függvénynek *lokális minimuma van az  $a$  pontban*, ha létezik  $r \in \mathbb{R}^+$ , hogy minden  $x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$  esetén  $f(a) \leq f(x)$ .
- Az  $f$  függvénynek *lokális szélsőértéke van az  $a$  pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az  $a$  pontban.
- Az  $f$  függvénynek *szigorú lokális maximuma van az  $a$  pontban*, ha létezik  $r \in \mathbb{R}^+$ , hogy minden  $a \neq x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$  esetén  $f(a) > f(x)$ .
- Az  $f$  függvénynek *szigorú lokális minimuma van az  $a$  pontban*, ha létezik  $r \in \mathbb{R}^+$ , hogy minden  $a \neq x \in B_r(a) \cap \text{Dom } f$  esetén  $f(a) < f(x)$ .
- Az  $f$  függvénynek *szigorú lokális szélsőértéke van az  $a$  pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az  $a$  pontban.
- Az  $f$  függvénynek *globális maximuma van az  $a$  pontban*, ha minden  $x \in \text{Dom } f$  esetén  $f(a) \geq f(x)$ .
- Az  $f$  függvénynek *globális minimuma van az  $a$  pontban*, ha minden  $x \in \text{Dom } f$  esetén  $f(a) \leq f(x)$ .
- Az  $f$  függvénynek *globális szélsőértéke van az  $a$  pontban*, ha globális maximuma vagy globális minimuma van az  $a$  pontban.

## 6. Deriválás fogalma és alaptulajdonságai

**Jelölés.** Az  $A \subseteq \mathbb{R}$  halmaz belső pontjainak a halmazát  $\text{Int } A$  jelöli.

**6.1. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \text{Int Dom } f$ .

- Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény *differenciálható*, vagy *deriválható az  $a$  pontban* ha létezik olyan  $A \in \mathbb{R}$ , melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

teljesül. Ezt az  $A$  számot az  $f$  függvény  *$a$  pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük.

- Az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a

$$f' : \left\{ a \in \text{Int Dom } f \mid \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

függvényt.

- Az  $f$  *differenciálható*, ha  $\text{Dom } f = \text{Dom } f'$ .

- Az  $f$  folytonosan differenciálható, ha differenciálható és  $f'$  folytonos. Az  $A \subseteq \mathbb{R}$  nyílt halmazon értelmezett,  $\mathbb{R}$  értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát  $C^1(A, \mathbb{R})$  jelöli.

**Jelölés.** Az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény deriváltjára használjuk még a  $\frac{df(x)}{dx}$  jelölést is.

**6.2. Tétel.** Legyen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$  és legyen  $f$  és  $g$  differenciálható az  $a$  pontban. Ekkor

- $f + g$  differenciálható az  $a$  pontban, és  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ;
- minden  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $cf$  differenciálható az  $a$  pontban, és  $(cf)'(a) = cf'(a)$ ;
- $fg$  differenciálható az  $a$  pontban, és  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ;
- ha  $g(a) \neq 0$ , akkor  $\frac{f}{g}$  differenciálható az  $a$  pontban, és  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ .

**6.3. Tétel.** (Közvetett függvény deriválási szabálya, láncszabály.) Legyen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ha  $g$  differenciálható az  $a$  pontban és  $f$  differenciálható a  $g(a)$  pontban, akkor  $f \circ g$  differenciálható az  $a$  pontban, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

**6.4. Tétel.** Minden  $a \in \mathbb{R}$  esetén legyen  $f_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f_a(x) = x^a$ . Ekkor minden  $x \in \mathbb{R}^+$  esetén  $f'_a(x) = ax^{a-1}$  teljesül.

**6.5. Tétel.** Minden  $q \in \mathbb{R}^+$  esetén legyen  $g_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_q(x) = q^x$ . Ekkor minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $g'_q(x) = \ln q \cdot q^x$  teljesül.

**6.6. Tétel.** (Elemi szögfüggvények deriváltja.) Minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $\sin' x = \cos x$ ,  $\cos' x = -\sin x$  és  $\text{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

**Kiegészítés.** Továbbá a fenti függvények inverzéire az alábbiak teljesülnek.

- |    |                                                     |                                     |
|----|-----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. | $\log'_q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$     | $x \mapsto \frac{1}{x \ln q}$       |
| 2. | $\arcsin' : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$         | $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| 3. | $\arccos' : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$         | $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 4. | $\text{arctg}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$         |

◇

## 7. A derivált kapcsolata a függvénnyel

**7.1. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \text{Dom } f'$ . Az  $f$  függvény  $a$  pontbeli érintőjének az egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

**7.2. Tétel.** (A differenciálhatóság általános jellemzése.) Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $a \in \text{Int Dom } f$ . Az  $f$  függvény pontosan akkor differenciálható az  $a$  pontban, ha létezik olyan  $c \in \mathbb{R}$ , hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - c(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Ha az  $f$  függvény differenciálható az  $a$  pontban akkor a fenti határértékben szereplő  $c$  konstansra  $f'(a) = c$  teljesül.

**7.3. Tétel.** *Ha egy függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos is abban a pontban.*

**7.4. Tétel.** (Rolle-tétel.) *Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, mely differenciálható az  $]a, b[$  intervallumon, és melyre  $f(a) = f(b)$ . Ekkor létezik olyan  $\xi \in ]a, b[$ , hogy*

$$f'(\xi) = 0.$$

**Bizonyítás.** A 4.20 Weierstrass-tétel értelmében az  $f$  függvény valamely  $\alpha, \beta \in [a, b]$  pontokban felveszi a minimumát és maximumát. Ha  $\{\alpha, \beta\} = \{a, b\}$ , akkor az  $f$  függvény állandó, vagyis minden  $\xi \in ]a, b[$  pontban  $f'(\xi) = 0$  teljesül.

Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény a minimumát az  $\alpha$  pontban veszi fel, melyre  $\alpha \in ]a, b[$  teljesül. Mivel az  $f$  függvény differenciálható az  $\alpha$  pontban, ezért

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \begin{cases} = \lim_{x \rightarrow \alpha+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0; \\ = \lim_{x \rightarrow \alpha-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0, \end{cases}$$

ahol felhasználtuk, hogy minden  $x \in [a, b]$  esetén  $f(x) \geq f(\alpha)$ . A fenti egyenlőtlenségekből  $f'(\alpha) = 0$  adódik.

Teljesen hasonlóan bizonyítható, hogy  $f'(\beta) = 0$ , ha azt tesszük fel, hogy az  $f$  függvény a maximumát a  $\beta$  pontban veszi fel, melyre  $\beta \in ]a, b[$  teljesül.

**7.5. Tétel.** (Lagrange-tétel.) *Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, mely differenciálható az  $]a, b[$  intervallumon. Ekkor létezik olyan  $c \in ]a, b[$ , hogy*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

**Bizonyítás.** Rolle-tételt kell alkalmazni a  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

függvényre.

**7.6. Tétel.** *Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  nyílt intervallum, és  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény.*

1. *Ha minden  $x \in I$  esetén  $f'(x) = 0$ , akkor  $f$  állandó az  $I$  intervallumon.*
2. *Az  $f$  függvény pontosan akkor monoton növekvő az  $I$  intervallumon, ha minden  $x \in I$  esetén  $f'(x) \geq 0$ .*
3. *Ha minden  $x \in I$  esetén  $f'(x) > 0$ , akkor  $f$  szigorúan monoton növekvő az  $I$  intervallumon.*
4. *Az  $f$  függvény pontosan akkor monoton csökkenő az  $I$  intervallumon, ha minden  $x \in I$  esetén  $f'(x) \leq 0$ .*
5. *Ha minden  $x \in I$  esetén  $f'(x) < 0$ , akkor  $f$  szigorúan monoton csökkenő az  $I$  intervallumon.*

**Bizonyítás.** Legyen  $a, b \in I$  olyan, hogy  $a < b$ . A Lagrange-tétel értelmében létezik  $c \in ]a, b[$ , melyre

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

teljesül. Ebből egyszerűen kapjuk az állításokat.

1. Ha  $f' = 0$ , akkor  $f(b) - f(a) = 0$ .
2. Ha  $f$  monoton növekvő és  $c \in I$ , akkor az  $f$  függvény differenciálhatósága miatt

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Ha  $f' \geq 0$ , akkor  $f(b) - f(a) \geq 0$ , vagyis  $f$  monoton növekvő.

3. Ha  $f' > 0$ , akkor  $f(b) - f(a) > 0$ , vagyis  $f$  szigorúan monoton növekvő.

A 4. és 5. pont a fentiekhez hasonlóan igazolható.

**7.7. Definíció.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen  $f^{(0)} = f$ , és minden  $i \in \mathbb{N}^+$  esetén legyen  $f^{(i)} = (f^{(i-1)})'$ .

- Legyen  $n \in \mathbb{N}^+$  és  $a \in \mathbb{R}$ . Az  $f$  függvény  $n$ -szer differenciálható az  $a$  pontban, ha  $a \in \text{Dom } f^{(n)}$ .
- Az  $f$  függvény végtelenszer differenciálható az  $a \in \mathbb{R}$  pontban, ha minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $a \in \text{Dom } f^{(n)}$  teljesül.
- Az  $f$  függvény  $n$ -szer ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) differenciálható, ha  $\text{Dom } f^{(n)} = \text{Dom } f$ .
- Az  $f$  függvény végtelenszer differenciálható, ha minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $\text{Dom } f^{(n)} = \text{Dom } f$  teljesül. Az  $A \subseteq \mathbb{R}$  nyílt halmazon értelmezett  $\mathbb{R}$  értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát  $C^\infty(A, \mathbb{R})$  jelöli.
- Az  $f$  függvény  $n$ -szer ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) folytonosan differenciálható, ha  $f$   $n$ -szer differenciálható és  $f^{(n)}$  folytonos. Az  $A \subseteq \mathbb{R}$  nyílt halmazon értelmezett  $\mathbb{R}$  értékű  $n$ -szer ( $n \in \mathbb{N}^+$ ) folytonosan differenciálható függvények halmazát  $C^n(A, \mathbb{R})$  jelöli.

**7.8. Tétel.** Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 < n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \text{Dom } f^{(n)}$ . Tegyük fel továbbá, hogy minden  $i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i < n$  esetén  $f^{(i)}(a) = 0$ , valamint  $f^{(n)}(a) \neq 0$ .

1. Az  $f$  függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális maximuma az  $a$  pontban, ha  $n$  páros, és  $f^{(n)}(a) < 0$ .
2. Az  $f$  függvénynek pontosan akkor van szigorú lokális minimuma az  $a$  pontban, ha  $n$  páros, és  $f^{(n)}(a) > 0$ .
3. Ha  $n$  páratlan, akkor az  $f$  függvénynek nincsen lokális szélsőértéke az  $a$  pontban.

## 8. Határozott integrál

**8.1. Definíció.** Legyen  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

- Ha  $A$  alulról korlátos, akkor a legnagyobb alsó korlátját  $\inf A$  jelöli. Tehát a  $K = \inf A$  jelöléssel élve  $K$  alsó korlátja az  $A$  halmaznak (vagyis minden  $a \in A$  esetén  $K \leq a$  teljesül) és  $K$  a legnagyobb alsó korlát (vagyis ha  $K' \in \mathbb{R}$  olyan szám, hogy minden  $a \in A$  esetén  $K' \leq a$  teljesül, akkor  $K' \leq K$ ). Az  $\inf A$  számot az  $A$  halmaz *infimumának* nevezzük.
- Ha  $A$  felülről korlátos, akkor a legkisebb felső korlátját  $\sup A$  jelöli. Tehát a  $K = \sup A$  jelöléssel élve  $K$  felső korlátja az  $A$  halmaznak (vagyis minden  $a \in A$  esetén  $a \leq K$  teljesül) és  $K$  a legkisebb felső korlát (vagyis ha  $K' \in \mathbb{R}$  olyan szám, hogy minden  $a \in A$  esetén  $a \leq K'$  teljesül, akkor  $K \leq K'$ ). Az  $\sup A$  számot az  $A$  halmaz *szuprémumának* nevezzük.

**8.2. Definíció.** Az  $[a, b]$  korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan  $(x_i)_{i=0, \dots, n}$  szám  $n$ -est értünk melyre  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ , és minden  $0 \leq i \leq n-1$  esetén  $x_i < x_{i+1}$  teljesül. Az  $[a, b]$  intervallum felosztásainak a halmazát  $\mathcal{F}^{[a, b]}$  jelöli.

**8.3. Definíció.** Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény és  $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$  egy felosztás. Ekkor az  $f$  függvény  $(x_i)_{i=0, \dots, n}$  felosztáshoz tartozó *alsó közelítő összege*

$$s_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

**8.4. Definíció.** Az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény

- *Riemann-integrálható*, ha létezik olyan  $I \in \mathbb{R}$  szám, hogy minden  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  esetén létezik olyan  $x$  felosztása az  $[a, b]$  intervallumnak, melyre

$$I - \varepsilon < s_x(f) \leq S_x(f) < I + \varepsilon$$

teljesül. Ekkor az  $I$  számra az  $\int_a^b f$  vagy az  $\int_a^b f(x) \, dx$  jelölést használjuk. Továbbá bevezetjük az  $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$  jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Riemann-integrálható}\}.$$

- Ha  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ , akkor bevezetjük a  $\int_b^a f = -\int_a^b f$  jelölést.
- Továbbá minden  $a \in \mathbb{R}$  pontra, és  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre  $a \in \text{Dom } f$  esetén legyen  $\int_a^a f = 0$ .
- Ha  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$ , valamint  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ , akkor a  $\int_a^b f$  és a  $\int_b^a f$  mennyiséget az  $f$  függvény *határozott integráljának* nevezzük.

**Jelölés.** Riemann-integrálható  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$  függvény integráljának a jelölésénél gyakran beírjuk a függvény változóját.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f$$

## 9. A Newton–Leibniz-tétel és következményei

**9.1. Tétel.** Az  $[a, b]$  intervallumon értelmezett folytonos függvények mind Riemann-integrálhatók, azaz  $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$  teljesül. Továbbá, ha egy  $[a, b]$  intervallumon értelmezett függvény csak véges sok pontban nem folytonos, akkor szintén integrálható.

**9.2. Tétel.** Minden  $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$  és  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $f + g, cf, fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ , valamint

1.  $\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g);$
2.  $\int_a^b (cf) = c \int_a^b f;$
3. ha  $f \leq g$ , akkor  $\int_a^b f \leq \int_a^b g;$
4.  $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$

**9.3. Tétel.** (Newton–Leibniz-tétel.) Legyen  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$  és  $F \in C([a, b], \mathbb{R})$  olyan függvény, mely differenciálható az  $]a, b[$  intervallumon, és itt  $F' = f$ . Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**Jelölés.** Az  $F \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$  függvény esetén az alábbi jelölést fogjuk használni.

$$[F]_a^b = F(b) - F(a)$$

**9.4. Definíció.** Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  nyílt intervallum, és  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . A differenciálható  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $f$  *primitív függvényének* nevezzük, ha  $F' = f$  teljesül. Az  $f$  függvény *határozatlan integráljának* nevezzük az

$$\{F : I \rightarrow \mathbb{R} \mid F' = f\}$$

halmazt, melyre az  $\int f$  vagy  $\int f(x) \, dx$  szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

**9.5. Tétel.** Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  nyílt intervallum,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f$  primitív függvénye. Ekkor az  $F - G$  függvény állandó.

**Bizonyítás.** A Rolle-tétel következménye.

**Megjegyzés.** A fenti tétel nem igaz, ha  $I$  nem intervallum!

◇

**Jelölés.** A fenti tétel miatt, ha  $F$  az  $f$  függvény egy primitív függvénye, akkor az

$$\int f = F + C$$

rövidebb, de pontatlanabb jelölést is használjuk.

**9.6. Tétel.** Legyen  $I \subseteq \mathbb{R}$  nyílt intervallum,  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  pedig olyan, hogy mindkettőnek létezik primitív függvénye. Ekkor minden  $c \in \mathbb{R}$  számra

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad \text{és} \quad \int (cf) = c \int f.$$

**Bizonyítás.** Az  $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvényre vonatkozó

$$(F + G)' = F' + G' \quad (cF)' = cF'$$

deriválási szabályból következik.

**9.7. Tétel.** (Elemi határozatlan integrálok.) Legyen  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Ekkor az integrandus értelmezési tartományának nyílt intervallumain az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{array}{lll} \int \exp = \exp + C & \int \sin = -\cos + C & \int \cos = \sin + C \\ \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C & \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C & \int x^a dx = \frac{x^{1+a}}{1+a} + C \end{array}$$

**9.8. Tétel.** (Parciális határozatlan integrálás.) Legyen  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  olyan függvény, mely folytonosan differenciálható. Ekkor

$$\int (f'g) = fg - \int (fg')$$

teljesül.

**9.9. Tétel.** (Parciális integrálás.) Legyen  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  olyan függvény, mely folytonosan differenciálható az  $[a, b]$  intervallumon. Ekkor

$$\int_a^b (f'g) = [fg]_a^b - \int_a^b (fg')$$

teljesül.

**9.10. Tétel.** (Helyettesítéssel határozatlan integrálás.) Legyen  $F, \varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  folytonosan differenciálható függvények. Ekkor

$$\int F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$$

teljesül.

**9.11. Tétel.** (Helyettesítéssel integrálás.) Legyen  $f, \varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  olyan függvény, hogy  $\varphi$  folytonosan differenciálható az  $[a, b]$  intervallumon és  $f$  folytonosan differenciálható a  $\text{Ran } \varphi$  halmazon. Ekkor

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

teljesül.

## 10. Improprius integrálás

### 10.1. Definíció. (Improprius integrál.)

- Legyen  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, hogy minden  $x \in ]a, \infty[$  esetén  $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$  teljesül.

Ha a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$  határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  *függvény impropriusan integrálható* az  $[a, \infty[$  intervallumon, valamint az  $f$  *függvény improprius integrálja* az  $[a, \infty[$  intervallumon  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$ . Az  $[a, \infty[$  intervallumon impropriusan integrálható függvények halmazára az  $\mathcal{R}([a, \infty[, \mathbb{R})$  jelölést használjuk, valamint  $f \in \mathcal{R}([a, \infty[, \mathbb{R})$  esetén az improprius integrálra a

$$\int_a^\infty f = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$$

jelölést használjuk.

- Legyen  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, hogy minden  $x \in ]a, \infty[$  esetén  $f \in \mathcal{R}([a, x], \mathbb{R})$  teljesül.

Ha a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$  határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  *függvény improprius integrálja divergens* az  $[a, \infty[$  intervallumon.

- Legyen  $f : ]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, hogy minden  $x \in ]-\infty, a[$  esetén  $f \in \mathcal{R}([x, a], \mathbb{R})$

teljesül. Ha a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f$  határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  *függvény impropriusan integrálható* a  $] -\infty, a]$  intervallumon, valamint az  $f$  *függvény improprius integrálja* a  $] -\infty, a]$  intervallumon  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f$ . A  $] -\infty, a]$  intervallumon impropriusan integrálható függvények halmazára az  $\mathcal{R}(]-\infty, a], \mathbb{R})$  jelölést használjuk, valamint  $f \in \mathcal{R}(]-\infty, a], \mathbb{R})$  esetén az improprius integrálra a

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f$$

jelölést használjuk.

- Legyen  $f : ]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, hogy minden  $x \in ]-\infty, a[$  esetén  $f \in \mathcal{R}([x, a], \mathbb{R})$

teljesül. Ha a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f$  határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  *függvény improprius integrálja divergens* a  $] -\infty, a]$  intervallumon.

- Ha az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre  $f|_{]-\infty, 0]} \in \mathcal{R}(]-\infty, 0], \mathbb{R})$  és  $f|_{[0, \infty[} \in \mathcal{R}([0, \infty[, \mathbb{R})$  teljesül, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  *függvény impropriusan integrálható a valós számok halmazán*, valamint

az  $f$  *függvény improprius integrálja a valós számok halmazán*  $\int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f$ . A valós számok

halmazán impropriusan integrálható függvények halmazára az  $\mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  jelölést használjuk, valamint  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  esetén az improprius integrálra a

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f$$

jelölést használjuk.

## 11. Sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény

**11.1. Definíció.** Integrálható függvény integrálfüggvénye.

- Az  $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$  függvény *integrálfüggvénye*  $I_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_f(x) = \int_a^x f$ .
- Az  $f \in \mathcal{R}([a, \infty[, \mathbb{R})$  függvény *integrálfüggvénye*  $I_f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_f(x) = \int_a^x f$ .
- Az  $f \in \mathcal{R}(]-\infty, a], \mathbb{R})$  függvény *integrálfüggvénye*  $I_f : ]-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_f(x) = \int_{-\infty}^x f$ .
- Az  $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  függvény *integrálfüggvénye*  $I_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_f(x) = \int_{-\infty}^x f$ .

**11.2. Tétel.** Integrálható függvény integrálfüggvénye folytonos.

**11.3. Tétel.** Jelölje  $I$  az  $[a, b]$ ,  $[a, \infty[$ ,  $]-\infty, a]$  vagy  $\mathbb{R}$  intervallumok valamelyikét. Ha  $f \in C(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$  és  $x$  az  $I$  belső pontja, akkor az  $I_f$  függvény differenciálható az  $x$  pontban és  $I'_f(x) = f(x)$ .

**Magyarázat.** Ha valamilyen  $X$  mennyiséget mérünk egy rendszeren, ahol a mérés kimenete egy valós szám aminek az értéke véletlenszerű, akkor a mennyiség elemzése szempontjából hasznos bevezetni az

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto P(X < t)$$

függvényt, ahol  $P(X < t)$  annak a valószínűsége, hogy a mérést egyszer elvégezve a mért mennyiség kisebb mint  $t$ . Ezen  $F$  függvény az  $X$  mennyiség *eloszlásfüggvénye* az adott rendszeren. Most az  $F$  függvény tulajdonságain keresztül definiáljuk az eloszlásfüggvény fogalmát. Továbbá az ilyen mennyiségeket *valószínűségi változónak* fogjuk nevezni.

**Megjegyzés.** A valószínűségi változó fogalma matematikailag precízen definiálható, de erre most nem térünk ki. ◇

**11.4. Definíció.** Egy  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt *valószínűségi eloszlásfüggvénynek* nevezünk, ha

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ;
- $F$  monoton növekvő;
- minden  $a \in \mathbb{R}$  esetén  $\lim_{x \rightarrow a-} F(x) = F(a)$ .

**11.5. Tétel.** Legyen  $F$  az  $X$  valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, valamint legyen  $a, b \in \mathbb{R}$   $a < b$  paraméter. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1.  $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
2.  $P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x) - F(a)$
3. Pontosán akkor lesz  $P(X = a) = 0$ , ha  $F$  folytonos az  $a$  pontban.

**11.6. Tétel.** Tegyük fel, hogy az  $X$  valószínűségi változó  $F$  eloszlásfüggvénye folytonos. Ekkor minden  $a, b \in \mathbb{R}$   $a < b$  paraméter esetén

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

**11.7. Definíció.** Legyen  $F$  eloszlásfüggvény. Ha létezik olyan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, hogy minden  $a \in \mathbb{R}$  esetén

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f$$

teljesül, akkor az  $f$  függvényt az  $F$  eloszlásfüggvény *sűrűségfüggvénynek* nevezzük.

**Megjegyzés.** Nem minden eloszlásfüggvénynek van sűrűségfüggvénye. ◇

**11.8. Tétel.** Ha az  $X$  valószínűségi változó  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eloszlásfüggvénye folytonosan differenciálható, akkor  $f = F'$  a  $F$  sűrűségfüggvénye.

**11.9. Tétel.** Ha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sűrűségfüggvény, akkor minden  $a \in \mathbb{R}$  esetén  $0 \leq f(a)$ , valamint  $\int_{-\infty}^{\infty} f = 1$ .

**11.10. Tétel.** Ha az  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eloszlásfüggvénynek létezik  $f$  sűrűségfüggvénye, akkor  $F$  folytonos, valamint, ha  $f$  folytonos az  $a \in \mathbb{R}$  pontban, akkor  $F'(a) = f(a)$ .

**11.11. Tétel.** Ha az  $X$  valószínűségi változó  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eloszlásfüggvényének létezik  $f$  sűrűségfüggvénye, akkor minden  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$  esetén

$$P(X \in [a, b]) = P(X \in ]a, b]) = \int_a^b f.$$

## 12. Várható érték és szórás

**12.1. Definíció.** Ha az  $X$  valószínűségi változó  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eloszlásfüggvényének létezik  $f$  sűrűségfüggvénye, valamint létezik az  $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$  integrál, akkor az  $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$  mennyiségről azt mondjuk, hogy az  $X$  valószínűségi változó várható értéke vagy az  $F$  eloszlásfüggvényhez tartozó várható érték vagy az  $f$  sűrűségfüggvény várható értéke. Továbbá, ha  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, hogy létezik az  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x) dx$  integrál, akkor az  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x) dx$  mennyiségről azt mondjuk, hogy a  $\varphi(X)$  valószínűségi változó várható értéke.

**Jelölés.** Ha valamilyen  $X$  valószínűségi változónak létezik várható értéke, akkor arra az  $\mathbb{E}(X)$  jelölést fogjuk használni.

**12.2. Tétel.** Legyen  $X$  és  $Y$  olyan valószínűségi változó, melynek létezik várható értéke. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1.  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X)$
3.  $\forall c \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(X + c) = \mathbb{E}(X) + c$

**12.3. Definíció.** Ha az  $X$  valószínűségi változó  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eloszlásfüggvényének létezik  $f$  sűrűségfüggvénye és várható értéke, valamint az  $(X - \mathbb{E}(X))^2$  mennyiségnek is létezik várható értéke, akkor az  $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$  mennyiségről azt mondjuk, hogy az  $X$  valószínűségi változó szórása vagy az  $F$  eloszlásfüggvényhez tartozó szórás vagy az  $f$  sűrűségfüggvény szórása.

**Jelölés.** Ha valamilyen  $X$  valószínűségi változónak létezik szórása, akkor arra a  $\sigma(X)$  jelölést fogjuk használni.

**12.4. Tétel.** Ha az  $X$  valószínűségi változónak létezik szórása, akkor

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}.$$

**12.5. Tétel.** Az  $X$  valószínűségi változónak pontosan akkor létezik szórása, ha az  $X^2$  valószínűségi változónak létezik várható értéke.

**12.6. Tétel.** Legyen  $X$  és  $Y$  olyan valószínűségi változó, melynek létezik szórása. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \sigma(\lambda X) = |\lambda| \sigma(X)$
2.  $\forall c \in \mathbb{R} : \sigma(X + c) = \sigma(X)$

**12.7. Tétel.** Ha  $X$  olyan valószínűségi változó, melynek létezik szórása, akkor az  $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$  valószínűségi változóra  $\mathbb{E}(Y) = 0$  és  $\sigma(Y) = 1$  teljesül.

**12.8. Definíció.** Ha  $X$  olyan valószínűségi változó, melynek létezik szórása, akkor az  $X$  standardizáltjának nevezzük az  $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$  valószínűségi változót.

**12.9. Definíció.** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Egy  $X$  valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy egyenletes eloszlású az  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  intervallumon, ha sűrűségfüggvénye

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{ha } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

**12.10. Tétel.** Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$   $a < b$  és  $X$  az  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ekkor  $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ ,  $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$  és eloszlásfüggvénye

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in [a, b]; \\ 1, & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

**12.11. Definíció.** Legyen  $\lambda > 0$ . Egy  $X$  valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

**12.12. Tétel.** Legyen  $\lambda > 0$  és  $X$   $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$  és eloszlásfüggvénye

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

**Magyarázat.** Ha  $A$  és  $B$  események, akkor  $P(A|B)$  szimbólummal jelöljük annak a valószínűségét, hogy bekövetkezik az  $A$  esemény, ha már a  $B$  esemény bekövetkezett. Az ilyen  $P(A|B)$  alakú valószínűségeket *feltételes valószínűségnek* nevezzük. Például szabályos dobókockával számolva

$$P(\text{kettőst dobunk} | \text{párosat dobunk}) = \frac{1}{3}.$$

Ha  $P(B) > 0$ , akkor  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

**12.13. Definíció.** Legyen  $X$  valószínűségi változó és  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  olyan intervallumok, hogy  $P(X \in J) > 0$ . Ekkor definiáljuk a

$$P(X \in I | X \in J) = \frac{P(X \in I \cap J)}{P(X \in J)}$$

menyiséget, amit *feltételes valószínűségnek* nevezünk.

**12.14. Tétel.** (Az exponenciális eloszlás örökifjú.) Ha  $X$  exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor minden  $a, b \geq 0$  paraméterek esetén

$$P(X > a + b | X > a) = P(X > b)$$

teljesül.

## 13. Euklidészi tér

**13.1. Definíció.** Legyen  $n \in \mathbb{N}^+$  és  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Defináljuk az összeadást, minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  esetén a számmal való szorzást és a skaláris szorzást az alábbi módon.

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \\ \langle x, y \rangle &= \sum_{k=1}^n x_k y_k\end{aligned}$$

**13.2. Tétel.** Minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  esetén

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ;
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ ;
4.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
5.  $\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .

**13.3. Definíció.** Minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén legyen  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$  az  $x$  vektor (kettes) normája.

**13.4. Tétel.** A  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kettes normára az alábbiak teljesülnek.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geq 0$ ;
2.  $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n : \|\lambda x\|_2 = |\lambda| \cdot \|x\|_2$ ;
4.  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ .

**13.5. Tétel.** Minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén  $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**13.6. Tétel.** (Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Minden  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vektorra

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

**13.7. Definíció.** Az  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  vektorok által bezárt szög

$$\alpha = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

**13.8. Definíció.** Egy  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  leképezést *lineáris leképezésnek* nevezünk, ha

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : A(x + y) = A(x) + A(y)$ ;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}^n : A(\lambda x) = \lambda A(x)$ .

**Jelölés.** Ha  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineáris leképezés és  $x \in \mathbb{R}^n$ , akkor az  $Ax = A(x)$  rövidítést használjuk.

**13.9. Tétel.** Ha  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineáris leképezés, akkor létezik egyértelműen valós számoknak olyan  $(A_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  rendszere, hogy minden  $x \in \mathbb{R}^n$  vektorra és  $i = 1, \dots, m$  indexre

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$$

teljesül. Továbbá, ha adott a valós számoknak egy  $(A_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  rendszere, akkor a fenti képlet egy  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineáris leképezés definíál.

**13.10. Definíció.** A valós számoknak egy  $(A_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$  rendszerét  $m \times n$ -es mátrixnak nevezzük.

**Magyarázat.** A fenti tétel alapján az  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineáris leképezések azonosíthatók az  $m \times n$ -es mátrixokkal.

**Jelölés.** A továbbiakban nem teszünk különbséget a lineáris leképezés és mátrixa között. Az  $A = (A_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$  mátrix elemeit a

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

módon szokás leírni.

**13.11. Definíció.** Ha  $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineáris leképezés és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor az alábbi módon definiáljuk lineáris leképezések összegét, számszorosát és kompozícióját.

$$\begin{aligned} A + B : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m & x &\mapsto Ax + Bx \\ \lambda A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m & x &\mapsto \lambda Ax \\ CA : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k & x &\mapsto CAx \end{aligned}$$

**13.12. Tétel.** Ha  $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $C : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineáris leképezés és  $\lambda \in \mathbb{R}$ , akkor  $A + B$ ,  $\lambda A$  és  $CA$  is lineáris leképezés, valamint ezek mátrixára

1.  $\forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : (A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij};$
2.  $\forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : (\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij};$
3.  $\forall i \in \{1, \dots, k\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : (CA)_{ij} = \sum_{l=1}^m C_{il} A_{lj}$

teljesül.

**13.13. Tétel.** Az  $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I(x) = x$  identitás leképezés mátrixára  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$  esetén

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

teljesül.

**13.14. Tétel.** Jelölje  $I$  az  $n \times n$ -es identitás mátrixot és  $0$  azt az  $n \times n$ -es mátrixot, melynek minden eleme nulla. Ekkor minden  $A, B, C$   $n \times n$ -es mátrixra és  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  számra az alábbiak teljesülnek.

1.  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
2.  $A + 0 = 0 + A = A$
3.  $A + B = B + A$
4.  $(A + B) + C = A + (B + C)$
5.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7.  $AI = IA = A$
8.  $(AB)C = A(BC)$
9.  $A(B + C) = AB + AC$
10.  $(A + B)C = AC + BC$