Számítási módszerek a fizikában 1, 4. hét

Polinomok osztása, gyökök és együtthatók közötti összefüggés és $\mathbb{R}^3$ elemi műveletei

I. Végezzük el a következő polinomosztásokat.

$$\frac{x^4+x^3-6x^2+4x+12}{x+3} \qquad \frac{x^4-1}{x-1} \qquad \frac{x^3}{x^2+1}$$

II. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés.

1. Jelölje λ_1 és λ_2 az $x^2+3x-7=0$ egyenlet megoldásait. Számítsuk ki $\dfrac{1}{\lambda_1^2}+\dfrac{1}{\lambda_2^2}$ értékét.
2. Jelölje λ_1, λ_2 és λ_3 az $x^3-x^2+x-3=0$ egyenlet megoldásait. Számítsuk ki $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\lambda_k}$ értékét.
3. Mely $p\in\mathbb{R}$ paraméter esetén teljesül az $x^3+px^2+2x-3=0$ egyenlet λ_1, λ_2 és λ_3 megoldásaira a $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\lambda_k^2=5$ feltétel?
4. Jelölje λ_1 és λ_2 az $x^2+3x-7=0$ egyenlet megoldásait. Számítsuk ki $\sqrt[3]{\lambda_1}+\sqrt[3]{\lambda_2}$ értékét.

III. Írjuk fel a következő kifejezéseket a Kronecker-delta segítségével.

1. Adott $j,k,l,m\in\{1,2,3\}$ esetén $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=?$
2. Adott $k,l\in\{1,2,3\}$ esetén $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl}=?$
3. $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=?$
4. $\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ikj}=?$

IV. Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.

1. Mutassuk meg, hogy minden $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^+$ esetén $n^2\le\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$.
2. Mutassuk meg, hogy ha az $a,b,c,d\in\mathbb{R}^+$ számokra $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ teljesül, akkor $a+2b+3c+4d\le\sqrt{30}$. Milyen esetben van egyelőség?
3. Mutassuk meg, hogy minden $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ esetén $4(ad-bc)^2\le(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

V. Igazoljuk, hogy minden $a,b,c,d\in\mathbb{R}^3$ vektorra teljesülnek az alábbiak.

1. $a\times(b\times c)=\langle a,c\rangle\, b-\langle a,b\rangle\, c$
2. $(a\times b)\times(c\times d)=-\langle a,b\times c\rangle\, d+\langle a,b\times d\rangle\, c+\langle a,b\times d\rangle\, c$
3. $\langle a\times b,c\times d\rangle=\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle-\langle a,d\rangle\langle b,c\rangle$
4. $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$