Számítási módszerek a fizikában 1, 4. hét

Komplex számok alkalmazása a geometriában, transzformációk leírásában és relativisztikus dinamikában

I. Komplex számokkal jól kezelhető geometria feladatok.

1. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyre az u, v, z pontok egyenlő oldalú háromszöget adnak meg. (Az $u = 2+\mathrm{i}$ és a $v = -1+3\,\mathrm{i}$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
2. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyek az u és v csúcsponttal rendelkező négyzet középpontjai. (Az $u = 2 + \mathrm{i}$ és a $v = -1 + 3\,\mathrm{i}$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
3. Igazoljuk, hogy ha egy háromszög minden oldalára kifelé olyan szabályos háromszöget rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti háromszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új háromszögek középpontjai szabályos háromszöget határoznak meg.
4. Igazoljuk, hogy ha egy négyszög minden oldalára kifelé olyan négyzetet rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti négyszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új átellenes négyzetek középpontjai összekötő szakaszok merőlegesek egymásra és egyenlő a hosszuk.

II. Tekintsük komplex számsíkon az alábbi transzformációkat.
R_φ a $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való elforgatás az origó körül pozitív irányba. (Azaz $R_\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} z$.)
L_v a $v \in \mathbb{C}$ vektorral való eltolás. (Azaz $L_v(z) = z + v$.)
M_λ a $\lambda \in \mathbb{R}^+$ faktorral való nyújtás. (Azaz $M_\lambda(z) = \lambda z$.)

1. Mely egyenletek teljesülnek az alábbiak közül minden $\varphi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén?
$$R_\varphi L_v = L_v R_\varphi \quad R_\varphi M_\lambda = M_\lambda R_\varphi \quad M_\lambda L_v = L_v M_\lambda$$
2. Hogyan írhatjuk le egyszerűbben az alábbi transzformációkat?
$$R_{-\varphi} L_{-v} R_\varphi L_v \qquad M_{(1/\lambda)} L_{-v} M_\lambda L_v \qquad L_{-v\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}} R_{-\varphi} L_v R_\varphi$$

III. Relativisztikus ütközés. Tekintsünk két $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^+$ tömegpontot, melyek az x tengely mentén mozognak és tekintsünk el mindenféle külső erőhatástól. Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ paraméter (fénysebesség). Legyen az x tengely povitív irányába mutató kezdeti sebességük u_1 és u_2, melyekre $-c < u_1, u_2 < c$ teljesül. Tegyük fel, hogy e két tömegpont teljesen rugalmasan ütközik, és ütközés utáni sebességük (az x tengely pozitív irányába) v_1 és v_2.
Tehát az ütközés előtt: $m_1, u_1 \rightarrow$, $m_2, u_2 \rightarrow$; valamint az ütközés után: $m_1, v_1 \rightarrow$, $m_2, v_2 \rightarrow$. Ebben az esetben energiamegmaradás és impulzusmegmaradás egyenlete az alábbi.

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$
$$\frac{m_1 u_1}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 u_2}{\sqrt{1-\frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}$$

1. A sebesség helyett számoljuk *rapiditás*sal: $a_1 = \operatorname{arth}\left(\frac{u_1}{c}\right)$, $a_2 = \operatorname{arth}\left(\frac{u_2}{c}\right)$, $b_1 = \operatorname{arth}\left(\frac{v_1}{c}\right)$, $b_2 = \operatorname{arth}\left(\frac{v_2}{c}\right)$.
Tehát az ütközés előtt: $m_1, a_1 \rightarrow$, $m_2, a_2 \rightarrow$; valamint az ütközés után: $m_1, b_1 \rightarrow$, $m_2, b_2 \rightarrow$. Mutassuk meg, hogy a két megmaradási egyenlet az alábbi alakban írható fel.
$$m_1 \operatorname{ch}(a_1) + m_2 \operatorname{ch}(a_2) = m_1 \operatorname{ch}(b_1) + m_2 \operatorname{ch}(b_2)$$
$$m_1 \operatorname{sh}(a_1) + m_2 \operatorname{sh}(a_2) = m_1 \operatorname{sh}(b_1) + m_2 \operatorname{sh}(b_2)$$

2. Igazoljuk, hogy a fenti két egyenlet összege és négyzeteik különbsége az alábbi.

$$m_1\,\mathrm{e}^{a_1} + m_2\,\mathrm{e}^{a_2} = m_1\,\mathrm{e}^{b_1} + m_2\,\mathrm{e}^{b_2}$$

$$\mathrm{ch}(a_1 - a_2) = \mathrm{ch}(b_1 - b_2)$$

Gondoljuk meg, hogy a második egyenlet alapján az egyenletrendszer nem triviális megoldását az $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ egyenlet adja.

3* Legyen $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$, $u_1 = -\frac{c}{5}$ és $u_2 = \frac{c}{10}$. Igazoljuk, hogy nem relativisztikusan számolva a teljesen rugalmas ütközés utáni sebességek $v_1 = \frac{c}{4}$ és $v_2 = -\frac{c}{20}$; míg a relativisztikus egyenletek használva

$$v_1 = \frac{2\sqrt{66}+95}{10\left(2\sqrt{66}+29\right)} \cdot c \qquad v_2 = \frac{5-2\sqrt{66}}{5\left(2\sqrt{66}+27\right)} \cdot c$$

adódik a sebességekre.